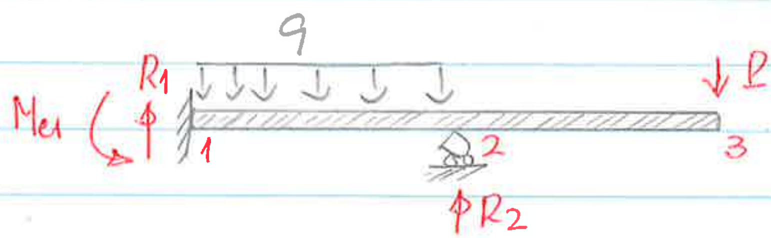
Eléments de Correction
Synthèse juin 2011

Bel Hadj Ali Nizar

Exercice 1 :

La structure étudiée peut être considérée comme assemblage de deux éléments poutre (1-2) et (2-3)

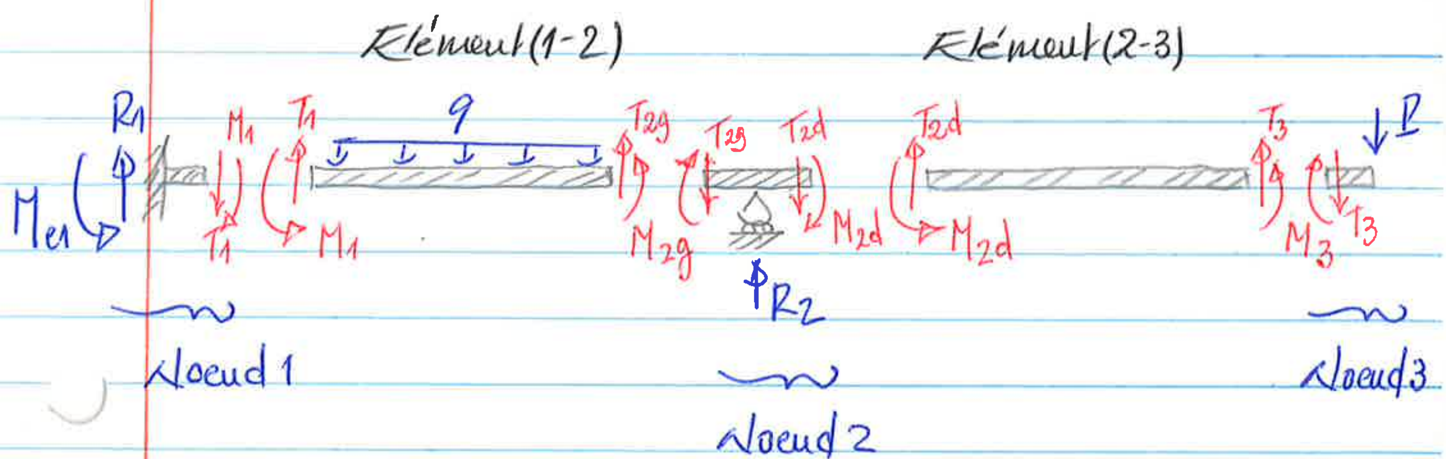
Regardons tout d'abord, les forces externes agissant sur la structure :



Le vecteur des forces externes est donc donné par :

$$F_{ext} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ M_{e1} \\ R_2 \\ 0 \\ -P \\ 0 \end{Bmatrix} + \text{Chargement uniforme } q \text{ sur } (1\text{-}2)$$

Faisons une discrétisation de la poutre et regardons les efforts internes qui agissent sur les noeuds :



Ici, on va exploiter deux éléments importants et complémentaires pour résoudre ce pb de structure :

<u>Primo</u> : les conditions d'équilibre aux noeuds

<u>Secondo</u> : la relation matricielle entre les efforts internes et les déplacements aux noeuds.

Si on écrit les conditions d'équilibre aux 3 noeuds on obtient :

Noeud 1 $\begin{cases} R_1 = T_1 \\ M_{e1} = M_1 \end{cases}$

Noeud 2 : $\begin{cases} R_2 = T_{2g} + T_{2d} \\ 0 = M_{2g} + M_{2d} \end{cases}$

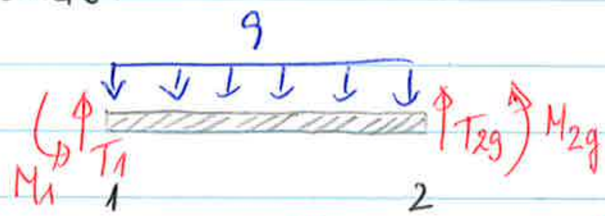
Noeud 3 : $\begin{cases} -P = T_3 \\ 0 = M_3 \end{cases}$

Les forces internes aux noeuds doivent équilibrer les forces externes agissant sur la structure !

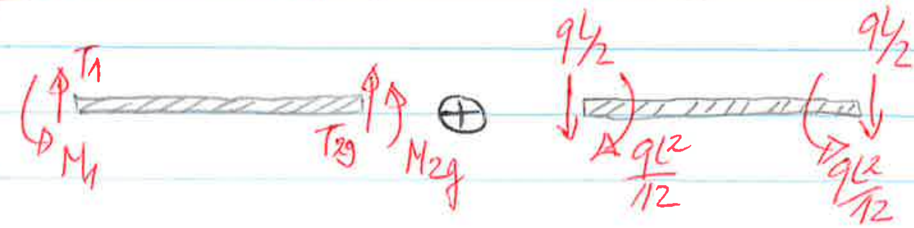
Ce qui peut s'écrire comme : $F_{ext} = F_{int}$

Essayons maintenant d'exprimer les forces internes en fonction des déplacements aux noeuds :

* Elément (1-2) :



=



Ici, la charge répartie est remplacée par les forces nodales équivalentes.

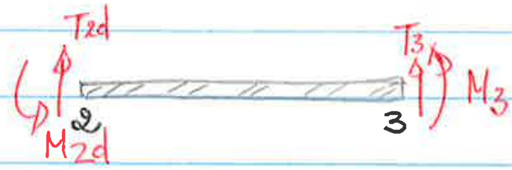
Justification : Dans la méthode des EF les équations d'équilibre sont exprimées aux noeuds c'est pour cette raison que toute charge uniforme doit être remplacée par le système de chargement nodal équivalent.

On peut maintenant écrire pour l'élément (1-2)

$$(1)\quad \begin{Bmatrix} T_1 \\ M_1 \\ T_{2g} \\ M_{2g} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -qL/2 \\ -qL^2/12 \\ -qL/2 \\ qL^2/12 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & \text{Sym} & 12 & -6L \\ & & & 4L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_1 \\ \alpha_1 \\ v_2 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}$$

Avec : $v_1 = 0$; $\alpha_1 = 0$, $v_2 = 0$ à cause des cond. d'appui.

* Elément (2-3) :



La relation force-déplacement s'écrit :

$$(2)\quad \begin{Bmatrix} T_{2d} \\ M_{2d} \\ T_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & \text{Sym} & 12 & -6L \\ & & & 4L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_2 \\ \alpha_2 \\ v_3 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}$$

Assemblage :

En assemblant les 2 systèmes élémentaires écrits pour les poutres (1-2) et (2-3) on obtient :

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ M_1 \\ T_{2g}+T_{2d} \\ M_{2g}+M_{2d} \\ T_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -qL/2 \\ -qL^2/12 \\ -qL/2 \\ qL^2/12 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_2 \\ v_3 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}$$

↳ Remarquons que ce vecteur F_{int} est équivalent au vecteur F_{ext} ! (page 2)

On obtient finalement :

$$\begin{Bmatrix} R_1 - qL/2 \\ M_{e1} - qL^2/12 \\ R_2 - qL/2 \\ qL^2/12 \\ -P \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_2 \\ v_3 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}$$

Le système réduit s'écrit alors :

$$\begin{Bmatrix} qL^2/12 \\ -P \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ -6L & 12 & -6L \\ 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_2 \\ v_3 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}$$

Question 1 : Comment obtenir le système réduit ?

le système réduit s'obtient à partir du système global en éliminant les lignes correspondant à des forces inconnues (pour garder un second membre sans inconnus) et aussi en éliminant les colonnes qui correspondent à déplacements nuls (les composantes de ces colonnes vont être multipliées par zéro donc complètement inutiles)

Question 2 : Quelle est l'utilité de ce système réduit ?

Le passage par le système réduit permet de séparer la détermination des déplacements inconnus des forces inconnus (réactions)

A travers la résolution du système réduit on détermine toutes les composantes de déplacement.

Une fois les déplacements déterminés, on peut revenir au système global pour déterminer les forces inconnues.

Revenons à nos calculs :

la résolution du système réduit permet d'obtenir :

$$\alpha_2 = \frac{qL^3}{48EI} - \frac{PL^2}{4EI}$$

$$v_3 = \frac{qL^4}{48EI} - \frac{7PL^3}{12EI}$$

$$\alpha_3 = \frac{qL^3}{48EI} - \frac{3PL^2}{4EI}$$

2°- Maintenant que les déplacements des noeud sont tous connus; il suffit de revenir aux équations du système global pour déterminer les expressions des réactions d'appuis.

Ligne 1 : $R_1 - ql/_2 = \frac{EI}{l^3} \cdot 6l \cdot \alpha_2$

Ce qui donne : $R_1 = \frac{5ql}{8} - \frac{3P}{2}$

Ligne 2 : $M_{e1} - \frac{ql^2}{12} = \frac{EI}{l^3} \cdot 2l^2 \cdot \alpha_2$

Ce qui donne : $M_{e1} = \frac{ql^2}{8} - \frac{PL}{2}$

Ligne 3 : $R_2 - ql/_2 = \frac{EI}{l^3} \cdot (-12 \cdot v_3 + 6l \cdot \alpha_3)$

Ce qui donne : $R_2 = \frac{3ql}{8} + \frac{5P}{2}$

3°) Le moment au droit de l'appui intermédiaire n'apparait pas dans le système globlal ! $\Rightarrow$ C'est normal puisque c'est un effort interne. Pour déterminer son expression, il suffit d'utiliser l'une des expressions élémentaires établis pour les poutres (1-2) et (2-3)

Considérons la dernière ligne du système (1)

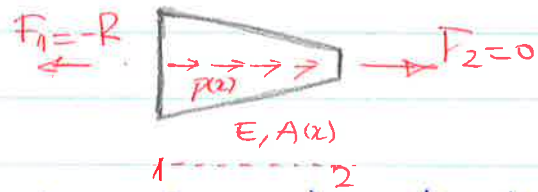
poutre (1-2) :

$M_{2g} + ql^2/_{12} = \frac{EI}{l^3} \cdot 4l^2 \cdot \alpha_2$ (v_1 ; α_1 et v_2 étant $= 0$)

Remplaçons α_2 par son expression ; on obtient :

$M_{2g} = -PL$ (Et bien sûre : $M_{2d} = PL$)

Exercice 2 :



* Détermination de matrice de rigidité k_e de cet élément :

$$k_e=\int_0^L E\,\underbrace{A\,(2-x/L)}_{A(x)}\cdot[B]^T\cdot[B]\,dx$$

Avec

$$N=\left[\frac{L-x}{L}\ ;\ x/L\right]\quad ;\quad [B]=\left[-1/L\quad 1/L\right]$$

Et donc :

$$k_e=\int_0^L \frac{EA}{L^2}\,(2-x/L)\cdot\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}dx$$

$$k_e=\frac{EA}{L^2}\cdot\int_0^L (2-x/L)\cdot\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}dx$$

$$k_e=\frac{EA}{L^2}\cdot\begin{pmatrix}\int_0^L(2-x/L)\,dx & \int_0^L(x/L-2)\,dx\\ \int_0^L(x/L-2)\,dx & \int_0^L(2-x/L)\,dx\end{pmatrix}$$

$$\int_0^L(2-x/L)\,dx=\left[2x-\frac{x^2}{2L}\right]_0^L=2L-L/2=3L/2$$

On obtient donc :

$$k_e=3/2\cdot\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

Le vecteur second membre Fe est donné par :

$$Fe = \begin{Bmatrix} -R \\ 0 \end{Bmatrix} + \int_0^L [N]^T \cdot p(x)\, dx$$

$$Fe = \begin{Bmatrix} -R \\ 0 \end{Bmatrix} + \int_0^L \begin{Bmatrix} \frac{L-x}{L} \\ x/L \end{Bmatrix} \cdot p\,(1 - x/L)\, dx$$

$$Fe = \begin{Bmatrix} -R \\ 0 \end{Bmatrix} + P/L \cdot \int_0^L \begin{Bmatrix} (L-x)\cdot(1 - x/L) \\ x \cdot (1 - x/L) \end{Bmatrix} dx$$

$$Fe = \begin{Bmatrix} -R \\ 0 \end{Bmatrix} + P/L \cdot \begin{Bmatrix} \int_0^L (L - 2x + x^2/L)\, dx \\ \int_0^L (x - x^2/L)\, dx \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad Fe = \begin{Bmatrix} -R \\ 0 \end{Bmatrix} + P/L \cdot \begin{Bmatrix} L^2/3 \\ L^2/6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -R \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} PL/3 \\ PL/6 \end{Bmatrix}$$

L'équation de rigidité s'écrit :

$$K_e \cdot \{x\} = Fe.$$

$$3/2 \cdot \frac{EA}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} PL/3 - R \\ PL/6 \end{Bmatrix}$$

2ème équation : $3/2 \cdot \frac{EA}{L}\, u_2 = PL/6.$

Et donc : $$\boxed{u_2 = \frac{PL^2}{9EA}}$$

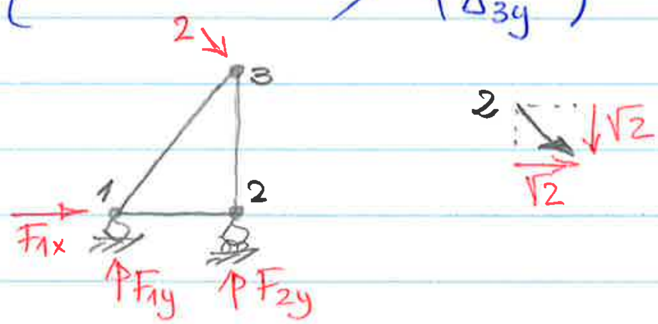
Exercice 3 :

1°- Détermination des déplacements des noeuds de la str.

Le système Force-Dép. s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ 0 \\ F_{2y} \\ \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ & \text{la Matrice de} & \\ & \text{Rigidité} & \\ \\ \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -0{,}5 \\ u_{2x} \\ 0 \\ u_{3x} \\ u_{3y} \end{Bmatrix}$$

→ tassement de l'appui (1)



On va utiliser les lignes 3, 5 et 6 pour déterminer les déplacements u_{2x}, u_{3x} et u_{3y} :

ligne 3 : $0 = 10 \cdot u_{2x} \Rightarrow \boxed{u_{2x} = 0}$

ligne 5 : $\sqrt{2} = -10 \cdot (-0{,}5) + 10\, u_{3x} + 10\, u_{3y}$

ligne 6 : $-\sqrt{2} = -10 \cdot (-0{,}5) + 10\, u_{3x} + 15\, u_{3y}$

Ce qui s'écrit : $\begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 15 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_{3x} \\ u_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sqrt{2} - 5 \\ -\sqrt{2} - 5 \end{Bmatrix}$

Ce qui donne : $\begin{cases} u_{3x} = \dfrac{\sqrt{2} - 1}{2} \\ u_{3y} = -\dfrac{2\sqrt{2}}{5} \end{cases}$

2°- Détermination des réactions d'appui :

On va maintenant utiliser les lignes 1, 2 et 4 pour déterminer les réactions F_{1x}, F_{1y} et F_{2y} :

ligne 1 : $F_{1x} = 10 \cdot (-0{,}5) - 10 \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{2} + 10 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{5} \Rightarrow F_{1x} = -\sqrt{2}$

ligne 2 : $F_{1y} = 10 \cdot (-0{,}5) - 10 \, \frac{\sqrt{2}-1}{2} + 10 \, \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{5} \Rightarrow F_{1y} = -\sqrt{2}$

ligne 4 : $F_{2y} = -5 \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{5}\right) = 2\sqrt{2} \Rightarrow F_{2y} = 2\sqrt{2}$.

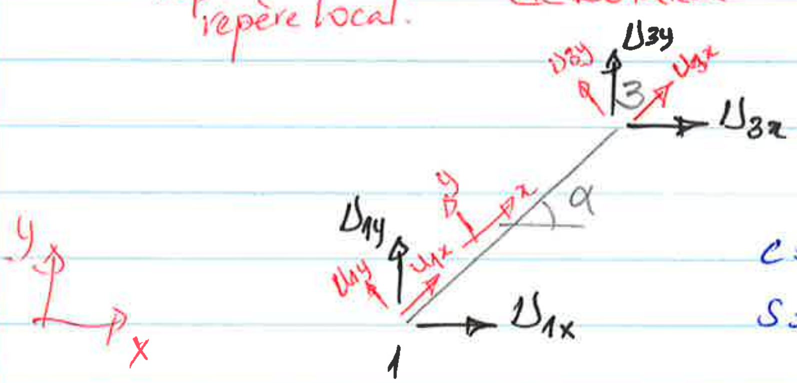
3°) Détermination de l'effort normal dans l'élément 1-3.

Nous avons :

Noeud 1 : $U_{1x} = 0$, $U_{1y} = 0$ Noeud 3 : $\begin{cases} U_{3x} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \\ U_{3y} = -\frac{2\sqrt{2}}{5} \end{cases}$

Déterminons les déplacements des noeuds dans le repère Local de l'élément :

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \end{Bmatrix}}_{\text{dép. repère local.}} = \underbrace{\begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}}_{\text{Matrice de Rotation}} \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} U_{1x} \\ U_{1y} \\ U_{3x} \\ U_{3y} \end{Bmatrix}}_{\text{dép. repère global}}$$



$c = \cos\alpha = \cos 45° = \sqrt{2}/2$

$s = \sin\alpha = \sin 45° = \sqrt{2}/2$

On obtient :

$$\begin{Bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \end{Bmatrix} = \sqrt{2}/2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}-1}{2} \\ -2\sqrt{2}/5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/10 - \sqrt{2}/4 \\ -9/20 + \sqrt{2}/4 \end{Bmatrix}$$

L'allongement de la barre $\Delta l_{13} = u_{3x} - u_{1x} = 1/10 - \sqrt{2}/4$.
Et donc l'effort normal dans la barre (1-3) est :

$$N_{13} = \frac{EA}{L} \cdot \Delta L_{1-3}$$

$$N_{13} = \frac{200\sqrt{2}}{10\sqrt{2}} \left(1/10 - \sqrt{2}/4 \right)$$

$$\Rightarrow \quad N_{13} = 2 - 5\sqrt{2}$$

Effet des forces externes

Effet du tassement d'appui

2 ↘ 3