Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabes
Département de Génie Civil

Mécanique des Structures
Dr. Nizar Bel Hadj Ali

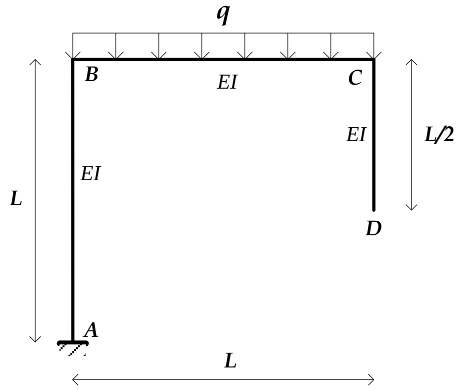
Section : GCV2
Date : 29 octobre 2018

Devoir de Contrôle

Durée : 1h30 – Les documents de cours ne sont pas autorisés

EXERCICE 1 : (10 POINTS)

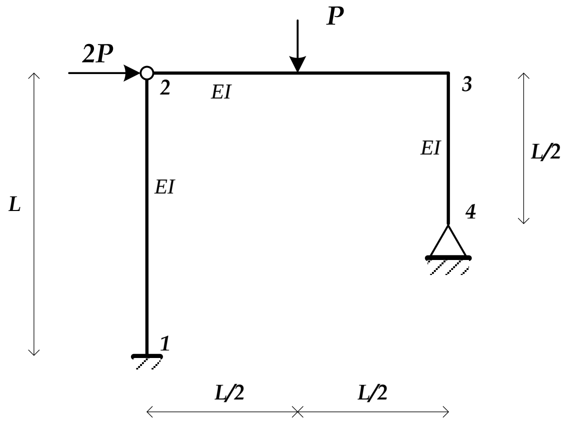
On considère la structure de la figure ci-dessous.



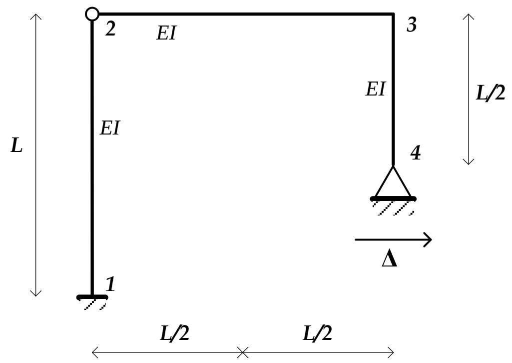
1. Déterminer les déplacements horizontal et vertical de la section libre au nœud D ;
2. Déterminer les expressions de l'énergie de déformation relative à la flexion, à l'effort tranchant et à l'effort normal (chaque expression à part) ;
3. Comparer les valeurs des trois quantités énergétiques (flexion, cisaillement et effort normal) et commenter les résultats.
   A.N. pour la question 3 : L = 4 m ; q = 5 kN/m ; E = 210 GPa ; G = 81 GPa ; I = 2000 cm^4
   Aire de la section droite : A = 15 cm^2 ; Aire de la section réduite A_s = 12 cm^2

EXERCICE 2 : (10 POINTS)

On considère le portique de la figure ci-dessous (configuration (a)).



(a)



(b)

1. Analyser la structure et tracer les diagrammes des moments de flexion et des efforts tranchants (8 pts) ;
2. Retracer les diagrammes des moments de flexion et des efforts tranchants si on considère que la structure est soumise à un déplacement imposé au nœud 4 d'intensité égale à Δ dirigé selon les indications de la figure (b) (P=0, dans ce cas) (2 pts).

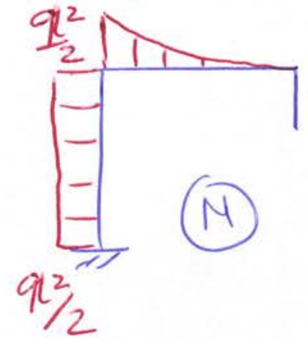
Eléments de Correction

Devoir de Contrôle Novembre 2018

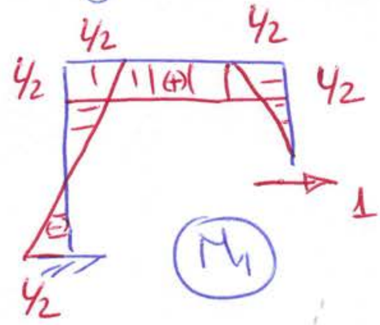
Exercice 1 :

1°/ ∘ Détermination du déplacement horizontal en D : u_D

Chargement réel



Chargement virtuel

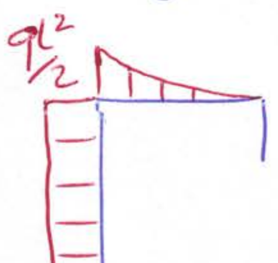


PTV :
$$u_D = \frac{-L}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{qL^2}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{-qL^4}{12EI}$$

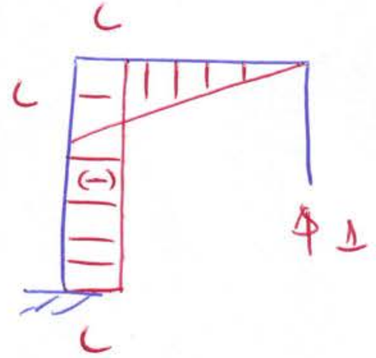
$$u_D = \frac{-qL^4}{12EI}$$

∘ Détermination du déplacement vertical en D : v_D

Chargement réel



Chargement virtuel



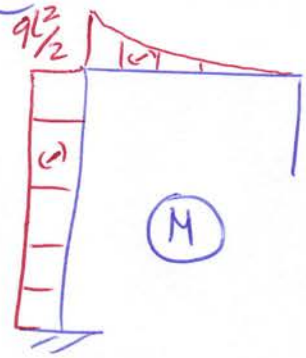
PTV :
$$v_D = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{qL^2}{2} \cdot L - \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{qL^2}{2} \cdot L$$

$$v_D = -\frac{qL^4}{2EI} - \frac{qL^4}{8EI}$$

$$\rightarrow \quad v_D = \frac{-5qL^4}{8EI}$$

2°) ◦ Expression de l'energie de déformation en flexion :

Diagramme



$$U_{flexion} = \frac{1}{2EI} \cdot \int_{Structure} M^2 \, dx$$

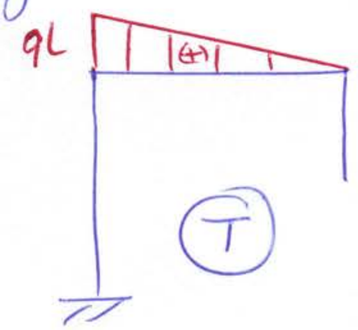
on peut utiliser le tableau des intégrales de Mohr.

$$U_{flexion} = \frac{1}{2EI} \cdot \left[\underbrace{L \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot \frac{ql^2}{2}}_{AB} + \underbrace{\frac{L}{5} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot \frac{ql^2}{2}}_{BC} \right]$$

$$U_{flexion} = \frac{3 \cdot q^2 \cdot L^5}{20\,EI}$$

◦ Expression de l'énergie de déformation en cisaillement :

Diagramme



$$U_{cisaillement} = \frac{1}{2GA_s} \cdot \int_{Str} T^2 \, dx$$

$$U_{cisaillement} = \frac{1}{2GA_s} \left[L \cdot \frac{1}{3} \cdot qL \cdot qL \right]$$

$$U_{cisaillement} = \frac{q^2 \cdot L^3}{6\,G A_s}$$

◦ Expression de l'energiede de déformation pour l'effort normal :

Diagramme

$$U_{Normal} = \sum_{poutres} \frac{N_i^2 \cdot L_i}{2EA}$$

La seule poutre sollicitée par un effort normal c'est la poutre AB ce qui donne :

$$U_{Normal} = 1/2 \cdot \frac{(qL)^2 \cdot L}{EA}$$

$$\Rightarrow \quad U_{Normal} = \frac{q^2 \cdot L^3}{2EA}.$$

3°) Application numérique :

$$U_{flexion} = 914,2 \text{ N.m} \; ; \; U_{cisai} = 2,74 \text{ N.m}$$

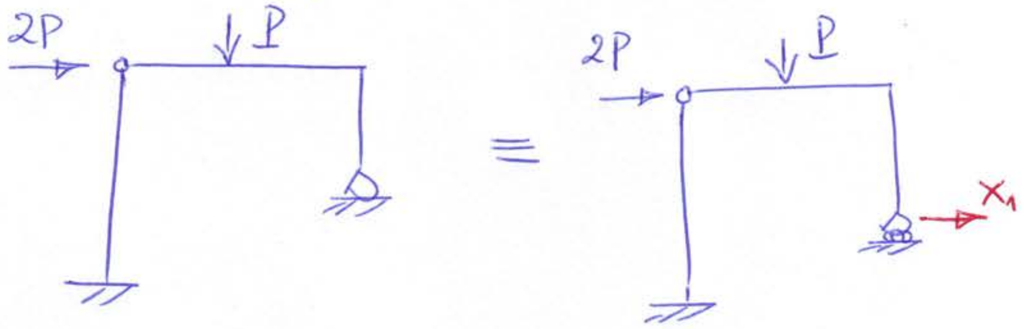
$$U_{Norm} = 2,54 \text{ N.m}.$$

Il est clair à travers cet exemple que l'energie de déformation est gouvernée par la flexion.

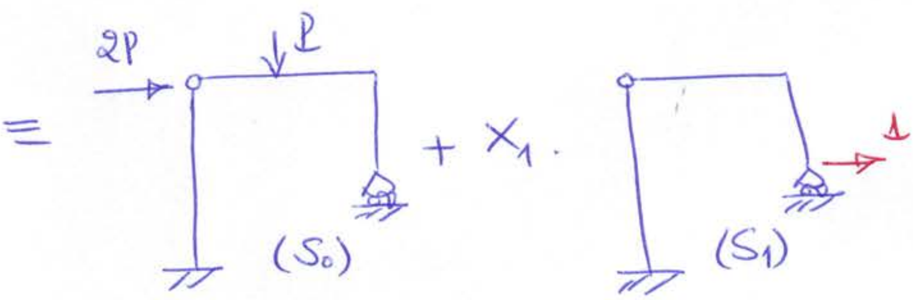
l'effort tranchant et l'effort normal ne participent que par une fraction trè petite dans l'energie de déformation de la structure.

Exercice 2 :

1°- La structure est hyperstatique de degré 1. On va utiliser la méthode des forces.



\+ dép. horizontal nul au nœud 4



⊕ la condition de compatibilité cinématique $u_4 = 0$

• La condition de compatibilité cinématique s'écrit :

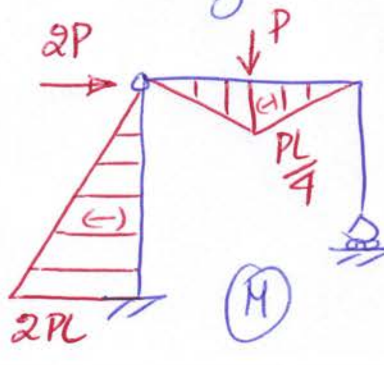
$$a_{10} + X_1 . a_{11} = 0$$

Avec : a_{10} : dép. horizontal au nœud 4 dans (S_0)

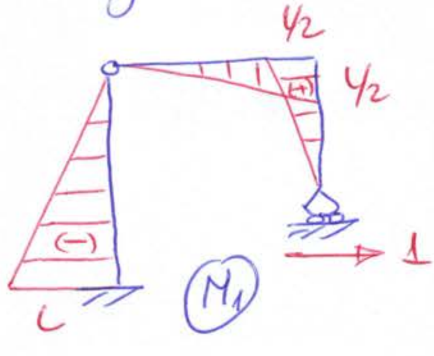
a_{11} : " " " " dans (S_1)

* Détermination de a_{10} : par application du PTV.

Chargement réel



Chargement virtuel

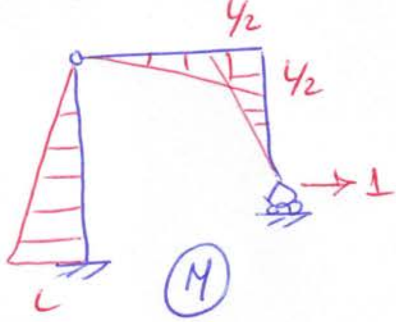


$$a_{10} = 1/_{EI} \cdot 1/3 \cdot 2PL \cdot L + \frac{1+1/2}{6} \cdot 1/_{EI} \cdot \frac{PL}{4} \cdot L/2 = \frac{2PL^3}{3EI} + \frac{3PL^3}{96EI}$$

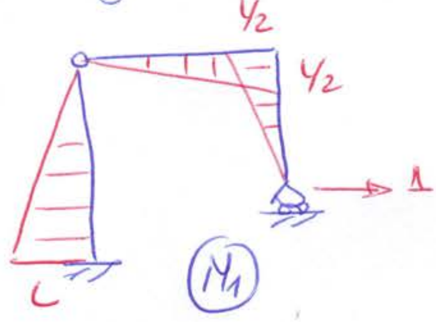
$$\Rightarrow \quad a_{10} = \frac{67\,PL^3}{96\,EI}$$

* Détermination de a_{11} :

Chargement réel



Chargement virtuel



PTV :

$$a_{11} = 1/_{EI} \cdot 1/3 \cdot L \cdot L + 1/_{EI} \cdot 1/3 \cdot L/2 \cdot L/2 + \frac{L/2}{EI} \cdot 1/3 \cdot L/2 \cdot L/2$$

$$\Rightarrow \quad a_{11} = \frac{11}{24}\, L^3/_{EI}.$$

. Détermination de la réaction d'appui X_1 :

La condition de compatibilité cinématique s'écrit :

$$a_{10} + X_1 \cdot a_{11} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{67\,PL^3}{96\,EI} + X_1 \cdot \frac{11}{24}\, L^3/_{EI} = 0$$

Ce qui donne : $\quad X_1 = -\frac{67}{44}P$

. Détermination des moments de flexion (par superposition)

$$M_{(S)} = M_{(S_0)} + X_1 \cdot M_{(S_1)}$$

$$M_1 = -2PL - \frac{67P}{44} \cdot (-L) = -\frac{21\,PL}{44}$$

$$M_3 = 0 - \frac{67P}{44} \cdot L/2 = -\frac{67PL}{88}$$

M_p : Moment sous la charge concentrée à mi-travée de 2-3

$$M_p = \frac{PL}{4} - \frac{67P}{44} \cdot L/4 = -\frac{23PL}{176}$$

Diagramme des moments de flexion :

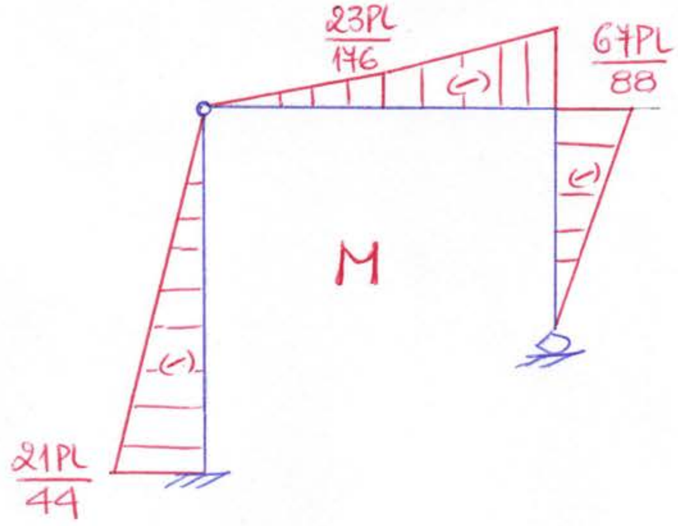
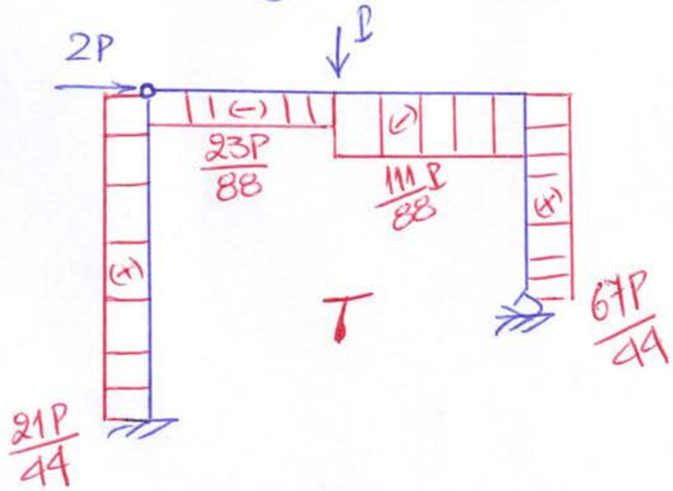


Diagramme des efforts tranchant :



2°- Si on considère le déplacement imposé Δ au noeud 4 ;
la condition de compatibilité cinématique s'écrit alors :

$$X_1 \cdot a_{11} = \Delta$$

on obtient alors : $X_1 = \frac{24 EI}{11 L^3} \cdot \Delta = \frac{24}{11} \Delta'$

(Avec $\Delta' = \frac{EI\Delta}{L^3}$)

les moments s'écrivent alors :

$$M_1 = 0 + \frac{24}{11} \Delta' \cdot (-L) = -\frac{24}{11} \Delta' L$$

$$M_3 = 0 + \frac{24}{11} \cdot \Delta' \cdot L/2 = \frac{12}{11} \cdot \Delta' L$$

$$M_P = 0 + \frac{24}{11} \cdot \Delta' \cdot L/4 = 6/11 \cdot \Delta' L$$