Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabes
Département de Génie Civil

Mécanique des Structures
BEL HADJ ALI N.

Section : GCV2
Date : 16 juin 2014

Devoir de Rattrapage

Durée : 2h00 – Les documents de cours ne sont pas autorisés (sauf un formulaire A4)

EXERCICE : (08 POINTS)

On considère la poutre de la figure ci-dessous.

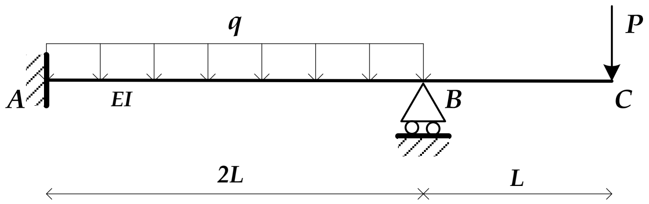


Figure 1.

Etudier la structure par la méthode des trois moments et tracer les diagrammes du moment de flexion et de l'effort tranchant.

PROBLEME : (12 POINTS)

On considère la structure de la figure ci-dessous.

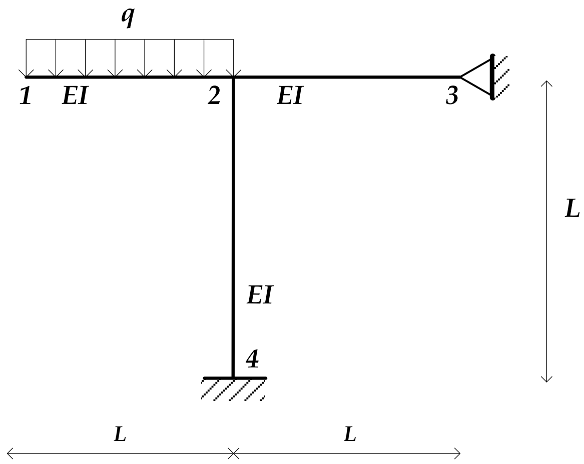


Figure 2.

Etudier la structure par la méthode des forces et tracer les diagrammes du moment de flexion et de l'effort tranchant.

Bon Courage

Eléments de Correction

Devoir de Rattrapage 16 juin 2014

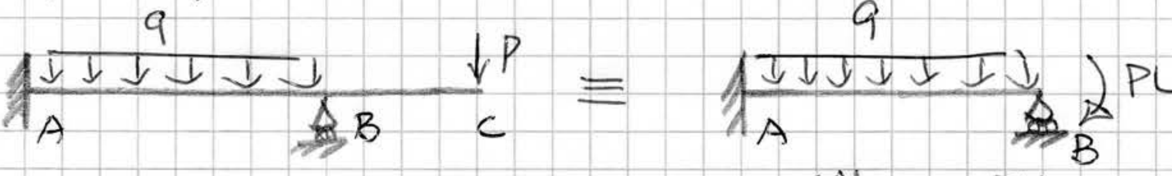
Exercice 1:

On va résoudre ce problème par les 2 méthodes suivantes:

- la méthode des rotations
- la méthode des forces.

* Résolution par la méthode des rotations:

Remarquons que:



$(M_{BA} = -PL)$

Equations des moments: Poutre AB : longueur 2L

$$m_{AB} = \frac{qL^2}{3} \; ; \; m_{BA} = -\frac{qL^2}{3}$$

$$M_{AB} = \frac{2EI}{(2L)} \cdot \theta_2 + \frac{qL^2}{3} = \frac{EI}{L} \cdot \theta_2 + \frac{qL^2}{3}$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{(2L)} \cdot 2\theta_2 - \frac{qL^2}{3} = 2\frac{EI}{L}\theta_2 - \frac{qL^2}{3}$$

$$M_{BA} = -PL \Rightarrow \frac{2EI}{L}\theta_2 - \frac{qL^2}{3} = -PL$$

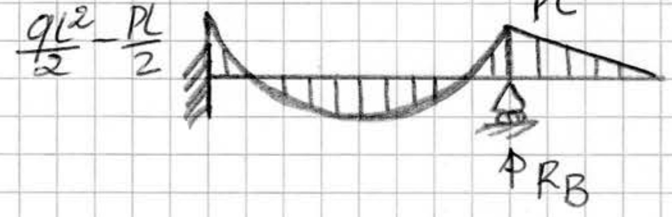
$$\Rightarrow \theta_2 = \frac{qL^3}{6EI} - \frac{PL^2}{2EI}$$

le moment d'encastrement est donc donné par:

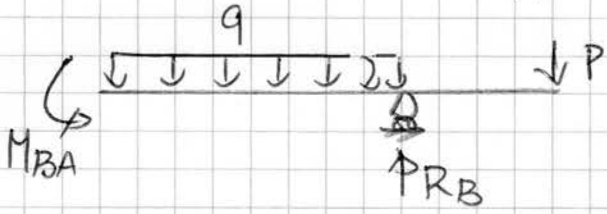
$$M_{AB} = \frac{EI}{L}\theta_2 + \frac{qL^2}{3} = \frac{EI}{L}\left[\frac{qL^3}{6EI} - \frac{PL^2}{2EI}\right] + \frac{qL^2}{3}$$

$$\Rightarrow M_{AB} = \frac{qL^2}{2} - \frac{PL}{2}$$

Diagramme des moments de flexion:



* Détermination de la réaction d'appui R_B.



Faisons une coupure au droit de l'encastrement en A.

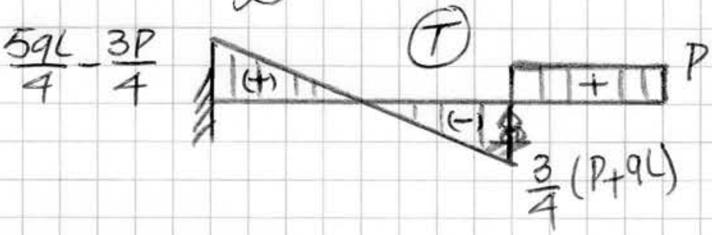
$$\Sigma M/_A = 0 \Rightarrow M_{BA} + R_B \cdot 2L - 2qL^2 - P \cdot 3L = 0.$$

$$\Rightarrow R_B = 2qL^2 + 3PL - M_{BA}.$$

$$R_B = 2qL^2 + 3PL - \frac{qL^2}{2} + PL/2.$$

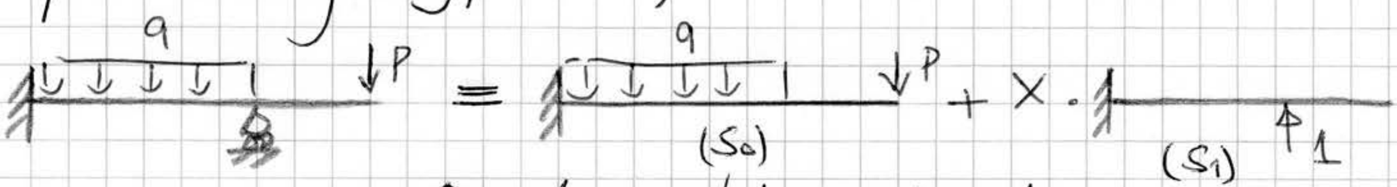
$$\Rightarrow R_B = \frac{3qL}{4} + \frac{7P}{4}$$

Diagramme des efforts tranchant :



2° Résolution par la méthode des forces :

La poutre est 1 fois hyperstatique et on a :



Avec la condition suivante :

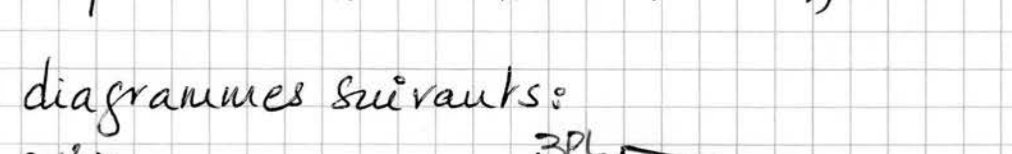
$$a_{10} + X \cdot a_{11} = 0$$

a_{10} : dép. vertical du noeud B dans (S_0)

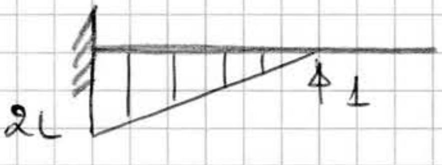
a_{11} : dép " " " " (S_1)

Avec les diagrammes suivants :

(S_0) :



(S_1) :



En utilisant le PTV on montre que :

$$a_{10} = -\frac{2L}{EI} \cdot 1/4 \cdot 2qL^2 \cdot 2L - \frac{2L}{EI} \cdot \frac{2L}{6} \left(2 \cdot 3PL + PL\right)$$

$$\Rightarrow \quad a_{10} = -\frac{2qL^4}{EI} - \frac{14}{3} PL^3/EI$$

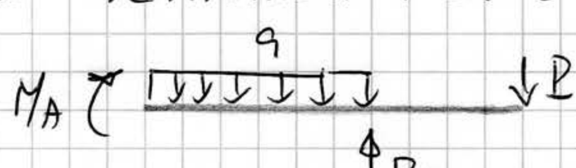
$$a_{11} = \frac{2L}{EI} \cdot 1/3 \cdot 2L \cdot 2L = 8/3 \; \frac{L^3}{EI}$$

l'équation $a_{10} + X \cdot a_{11} = 0$ nous donne :

$$X = R_B = \frac{3EI}{8L^3} \left[\frac{2qL^4}{EI} + \frac{14}{3} \frac{PL^3}{EI} \right]$$

$$\Rightarrow \quad X = R_B = \frac{3qL}{4} + \frac{7P}{4}.$$

Calculons le moment d'encastrement en A :

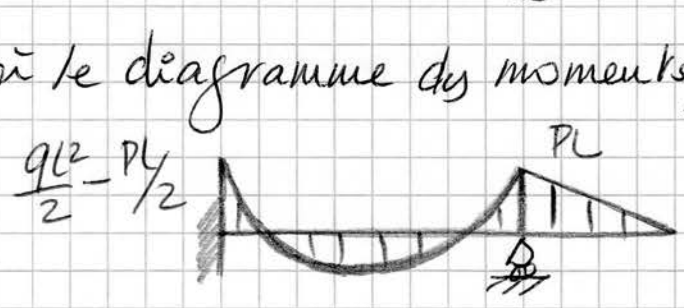


$$M_A + 2qL^2 + P \cdot 3L - R_B \cdot 2L = 0.$$

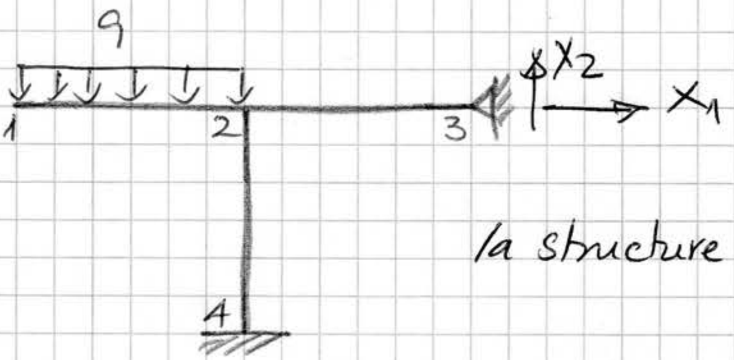
$$M_A = R_B \cdot 2L - 3PL - 2qL^2$$
$$= \frac{3qL^2}{2} + \frac{7}{2} PL - 3PL - 2qL^2$$

$$\Rightarrow \quad M_A = -\frac{qL^2}{2} + PL/2.$$

D'où le diagramme des moments suivant :

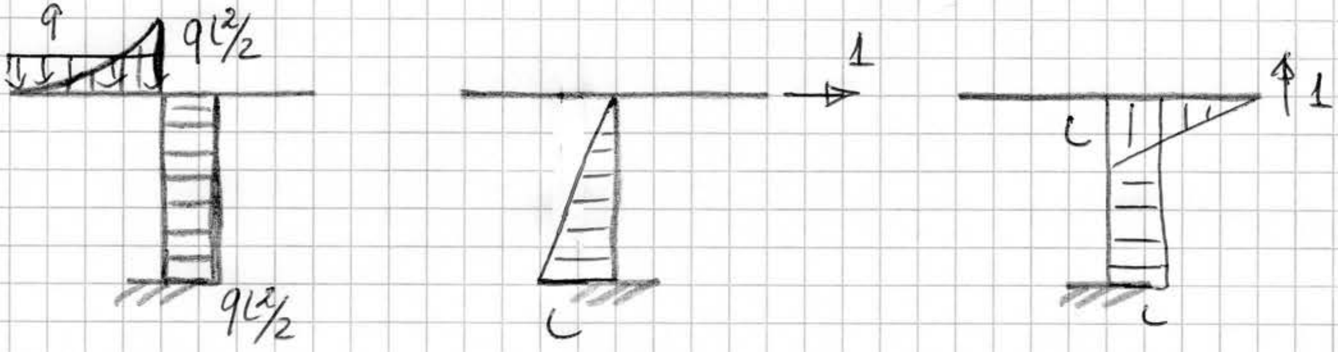


Exercice 2 :



la structure 2 fois hyperstatique

Considérons la structure isostatique équivalente obtenue en supprimant l'appui en 3.



(S_0) (S_1) (S_2)

Nous avons 2 conditions de compatibilité cinématique qui expriment le fait que les déplacements au noeud 3 sont empêchés.

$$a_{10} + X_1 \cdot a_{11} + X_2 \cdot a_{12} = 0$$
$$a_{20} + X_1 \, a_{21} + X_2 \cdot a_{22} = 0$$

Tableau synoptique des déplacements :

Cause / Effet	(S_0) q	(S_1) 1	(S_2) 1
dép. horiz en 3	$a_{10} = -\frac{qL^4}{4EI}$	$a_{11} = L^3/3EI$	$a_{12} = -L^3/2EI$
dép. vert. en 3	$a_{20} = qL^4/2EI$	$a_{21} = -L^3/2EI$	$a_{22} = \frac{4L^3}{3EI}$

Nous obtenons

$$\cancel{L^3/EI} \cdot \begin{bmatrix} 1/3 & -1/2 \\ -1/2 & 4/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} qL/4 \\ -qL/2 \end{Bmatrix} \cancel{L^3/EI}$$

Donc :

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \frac{36}{7} \cdot \begin{bmatrix} 4/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} qL/4 \\ -qL/2 \end{Bmatrix}$$

On obtient : $X_1 = \frac{3qL}{7}$; $X_2 = -\frac{3qL}{14}$

D'où le diagramme des moments suivant :