Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabes
Département de Génie Civil

Mécanique des Structures — *Section : GCV2*
BEL HADJ ALI N. — *Date : 29 juin 2015*

Devoir de Rattrapage

Durée : 1h30 – Les documents de cours ne sont pas autorisés

EXERCICE 1 : (06 POINTS)

Déterminer la rotation de la section libre (au nœud 3) de la structure de la figure ci-dessous.

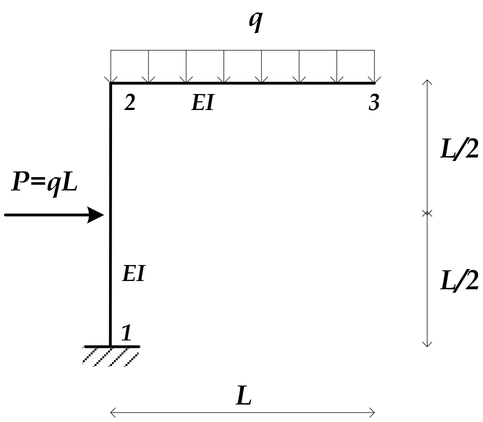


Figure 1.

EXERCICE 2 : (14 POINTS)

On considère le portique de la figure 2. On demande d'analyser cette structure par la méthode des rotations. Les déformations dues à N et T seront négligées.

1. Identifier les ddl (inconnues) de la structure (1pt) ;
2. Ecrire le système à résoudre (4pts) ;
3. Déterminer les inconnues (ddl) (2pts) ;
4. Déterminer les moments aux extrémités des barres et tracer les diagrammes de M et T (4pts).
5. Retracer les diagrammes de M et de T si on supprime la charge concentrée P (3pts).

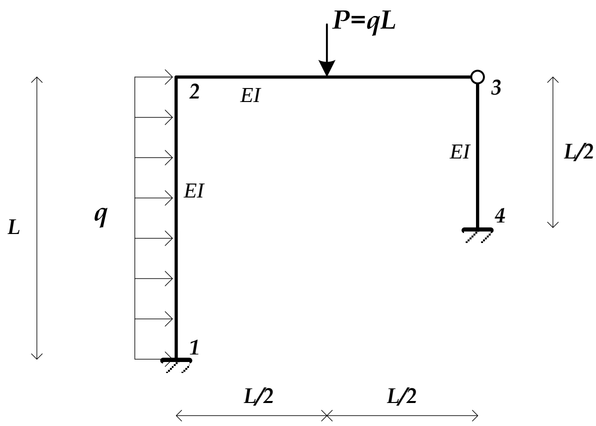


Figure 2.

AN : L = 5m ; q = 20kN/m

Bon Courage

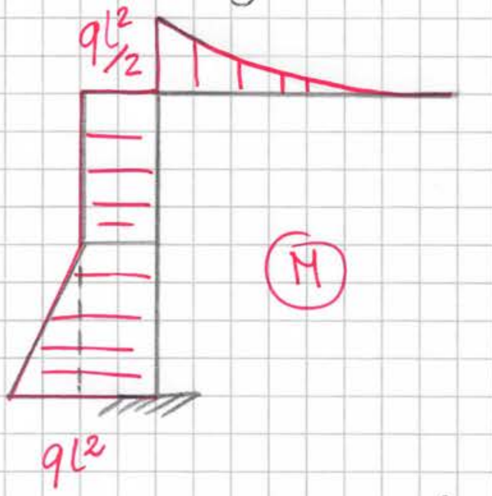
Eléments de Correction

Devoir de Rattrapage 29 juin 2015

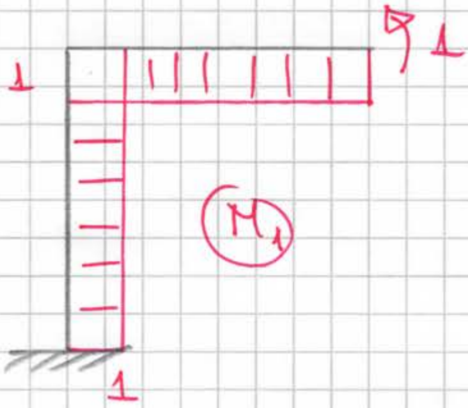
Exercice 1 :

Pour déterminer la rotation de la section libre (noeud 3) on va appliquer le <u>PTV</u>.

Chargement réel



Chargement virtuel



<u>PTV</u> $\Rightarrow$ $$\theta_3 = \int_{\text{Structure}} \frac{M M_1}{EI}\, dx.$$

Tableau des intégrales de Mohr :

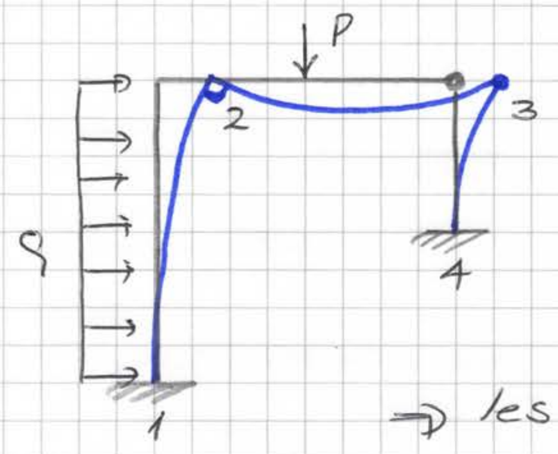
$$\theta_3 = -\frac{L/2}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot 1 + \frac{L}{EI} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot 1.$$

$$\theta_3 = -\frac{ql^2}{EI} \left[L/8 + L/2 + L/6 \right]$$

$$\boxed{\theta_3 = -\frac{19}{24} \frac{ql^3}{EI}}$$

Exercice 2 :

1°-



θ_1 et θ_4 nuls.

$\psi_{23} = 0$.

$\psi_{12} = \Delta/L$ et $\psi_{34} = \Delta/\tfrac{L}{2}$

$\Rightarrow \psi_{34} = 2 \cdot \psi_{12}$

$\Rightarrow$ les inconnues du problème : θ_2 et ψ_{12}

2°- Expressions des moments de flexion :

- Poutre 1-2 : $m_{12} = qL^2/12$; $m_{23} = -qL^2/12$

$$M_{12} = \frac{2EI}{L}(\theta_2 - 3\psi_{12}) + qL^2/12$$
$$M_{21} = \frac{2EI}{L}(2\theta_2 - 3\psi_{12}) - qL^2/12$$

- Poutre 2-3 : $m_{23} = PL/8$; $m_{32} = -PL/8$

la poutre est rigide-articulée :

$$M_{23} = \frac{3EI}{L}(\theta_2 - \psi_{23}) + m_{23} - \tfrac{1}{2} m_{32} = \frac{3EI}{L}\theta_2 + \frac{3PL}{16}$$
$M_{32} = 0$ (Articulation).

- Poutre 3-4 : $m_{34} = 0$; $m_{43} = 0$

la poutre est articulée-encastrée :

$M_{34} = 0$ (Articulation)
$$M_{43} = \frac{3EI}{L}(\theta_3 - \psi_{34}) = -\frac{3EI}{L}\psi_{34} = -\frac{6EI}{L}\cdot\psi_{12}$$

les Equations d'équilibre :

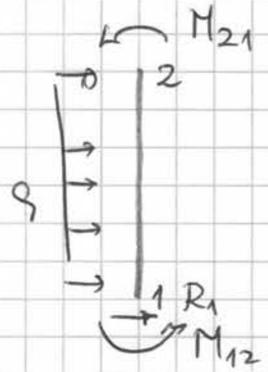
Commençons par l'équilibre du noeud 2 : $M_{21} + M_{23} = 0$.

Cela donne :
$$4\theta_2 - 6\psi_{12} + 3\theta_2 = \left(qL^2/12 - \frac{3PL}{16}\right)\cdot L/EI$$

$$\Rightarrow \quad 7\theta_2 - 6\psi_{12} = \left(\frac{qL^2}{12} - \frac{3PL}{16}\right)\cdot \frac{L}{EI} \quad (1)$$

Equilibre de forces horizontales : $qL + R_1 + R_4 = 0$.

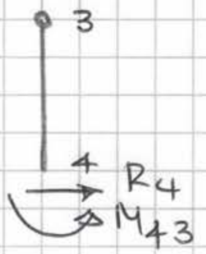
$\underline{R_1 = ?}$



$$\Sigma M/_2 = 0 \Rightarrow M_{12} + M_{21} + R_1 \cdot L + q \cdot L^2/2 = 0.$$

$$\Rightarrow R_1 = -\frac{M_{12}+M_{21}}{L} - \frac{qL}{2}$$

$\underline{R_4 = ?}$



$$\Sigma M/_3 = 0 \Rightarrow R_4 \cdot L/2 + M_{43} = 0.$$

$$\Rightarrow R_4 = -\frac{2M_{43}}{L}$$

L'équation d'équilibre s'écrit donc :

$$qL + R_1 + R_4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad qL - \frac{M_{12}+M_{21}}{L} - qL/2 - 2 \cdot \frac{M_{43}}{L} = 0.$$

$$\Rightarrow \quad M_{12} + M_{21} + 2 \cdot M_{43} = qL^2/2.$$

$$6\theta_2 - 12\varphi_{12} - 24\varphi_{12} = \frac{qL^3}{2EI}$$

$$\Rightarrow \quad -6\theta_2 + 36\varphi_{12} = -qL^3/2EI \qquad (2)$$

les équations (1) et (2) forment le système à résoudre :

$$\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -6 & 36 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \varphi_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{qL^3}{12EI} - \frac{3PL^2}{16EI} \\ -\frac{qL^3}{2EI} \end{Bmatrix}$$

3°) Résolution du système :

$$\begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \varphi_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{36 \cdot 6} \begin{bmatrix} 36 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -5/48 \\ -1/2 \end{Bmatrix} \cdot \frac{qL^3}{EI}$$

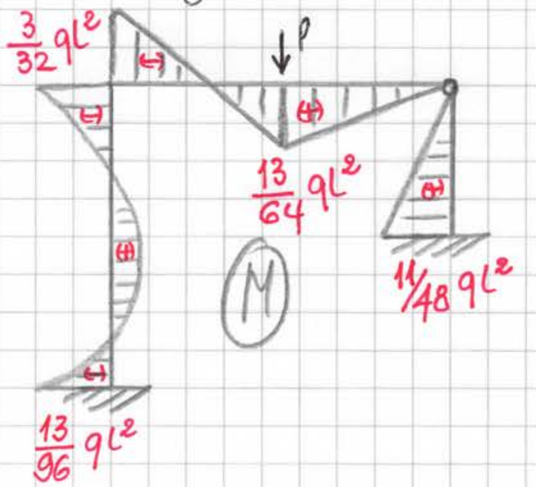
On obtient :

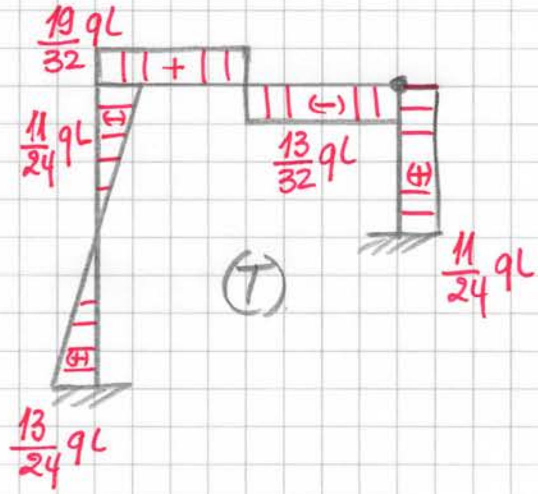
$$\theta_2 = -\frac{ql^3}{32EI} \quad ; \quad \varphi_{12} = \frac{-11ql^3}{576EI} \quad ; \quad \varphi_{34} = \frac{-11ql^3}{288EI}$$

4° Détermination des moments aux extrémités :

$$M_{12} = \frac{13}{96}ql^2 \quad ; \quad M_{21} = -\frac{3}{32}ql^2 \quad ; \quad M_{23} = \frac{3}{32}ql^2 \quad ; \quad M_{43} = \frac{11}{48}ql^2$$

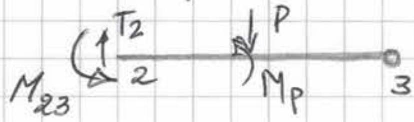
D'où le diagramme suivant :





Moment sous la charge concentrée P :

Faisons une coupure



$T_2 = ?$ $\quad \Sigma M/_3 = 0 \Rightarrow M_{23} + P.\frac{l}{2} - T_2.L = 0 \Rightarrow T_2 = \frac{M_{23}}{L} + \frac{P}{2}$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{19}{32}ql$$

$M_p = ?$ $\quad \Sigma M/_p = 0 \Rightarrow M_p + M_{23} - T_2.\frac{l}{2} = 0$

$$\Rightarrow M_p = T_2.\frac{l}{2} - M_{23} = \frac{19}{32}ql.\frac{l}{2} - \frac{3}{32}ql^2$$

$$\Rightarrow M_p = \frac{13}{64}ql^2$$

5° Si on supprime la charge P ; le système à resoudre s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \varphi_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{36.6} \begin{bmatrix} 36 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1/12 \\ -1/2 \end{Bmatrix} \, ql^3/EI.$$

on obtient alors :

$$\theta_2 = 0^{*} \quad ; \quad \varphi_{12} = -\frac{ql^3}{72EI} \quad ; \quad \varphi_{34} = -\frac{ql^3}{36EI}$$

↳ Cela simplifie les calculs ⚠

les moments s'écrivent donc :

$$M_{12} = \frac{ql^2}{6} \quad ; \quad M_{21} = 0 \quad ; \quad M_{23} = 0 \quad ; \quad M_{43} = ql^2/6.$$

D'où les diagrammes suivants: