Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabes
Département de Génie Civil

Mécanique des Structures — *Section : GCV2*
BEL HADJ ALI N. — *Date : 09 juillet 2018*

Devoir de Rattrapage

Durée : 2h00 – Les documents de cours ne sont pas autorisés

EXERCICE 1 : (8 POINTS)

On considère la structure de la Figure 1. Déterminer l'expression de la rotation de la section au nœud 3.

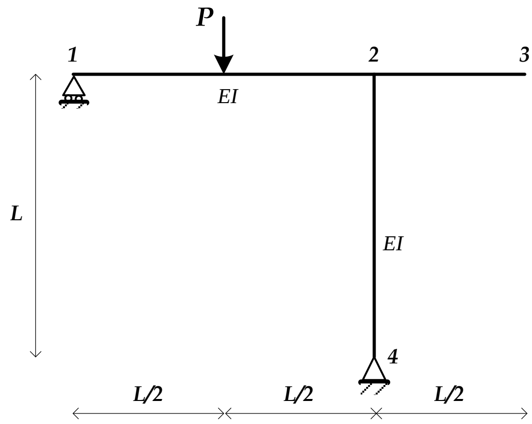


Figure 1.

EXERCICE 2 : (12 POINTS)

On considère le portique de la Figure 2. On demande d'analyser cette structure par la méthode des rotations. Les déformations dues à N et T seront négligées.

1. Identifier les ddl (inconnues) de la structure (1pt) ;
2. Ecrire le système à résoudre en considérant $P=qL$ (4pts) ;
3. Déterminer les inconnues (ddl) (3pts) ;
4. Déterminer les moments aux extrémités des barres et tracer les diagrammes de M et T (4pts).

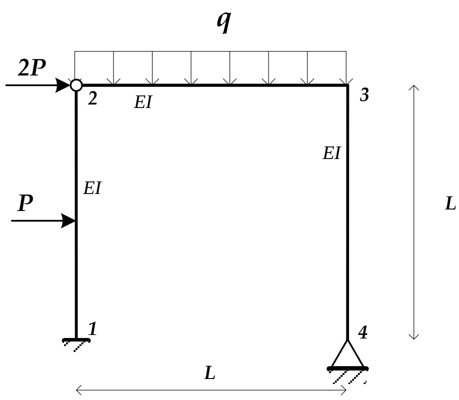


Figure 2.

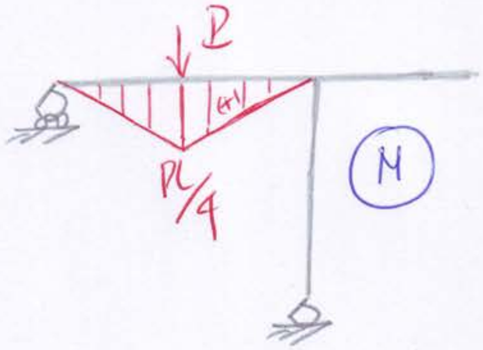
Éléments de Correction

Rattrapage juillet 2018

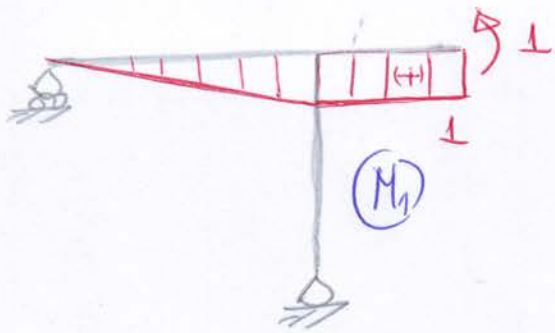
Exercice 1 :

La structure est isostatique et la détermination du déplacement ou de la rotation de la section libre au noeud 3 fait appel à l'application du PTV :

chargement réel



chargement virtuel



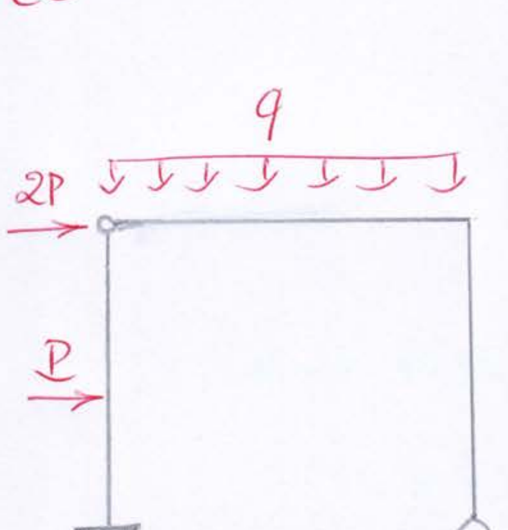
PTV : $$\theta_3 = \int_{str} \frac{M M_1}{EI}\, dx$$

Tableau des intégrales :

$$\theta_3 = \frac{L}{EI} \cdot \frac{1 + 1/2}{6} \cdot \frac{PL}{4} \cdot 1$$

$$\Rightarrow \quad \theta_3 = \frac{PL^2}{16 EI}$$

Exercice 2 :



1° Identification des inconnues :

$\theta_1 = 0$; $\varphi_{23} = 0$

$\varphi_{12} = \varphi_{34}$

θ_4 : non considérée

Donc : 2 inconnues : θ_3 et φ_{12}

2°) Expressions des moments :

- Poutre 1-2 : rigide-articulée avec charge concentrée à mi-travée

$$m_{12} = \frac{PL}{8} \; ; \; m_{21} = -\frac{PL}{8}$$

$$\begin{cases} M_{12} = \frac{3EI}{L}(\theta_1 - \varphi_{12}) + m_{12} - \frac{1}{2} m_{21} \\ M_{21} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} M_{12} = -\frac{3EI}{L}\varphi_{12} + \frac{3PL}{16} \\ M_{21} = 0 \end{cases}$$

- Poutre 2-3 : articulée-rigide avec charge uniformement répartie

$$m_{23} = \frac{ql^2}{12} \; ; \; m_{32} = -\frac{ql^2}{12}$$

$$\begin{cases} M_{23} = 0 \\ M_{32} = \frac{3EI}{L}(\theta_3 - \varphi_{23}) + m_{32} - \frac{1}{2} \cdot m_{23} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} M_{23} = 0 \\ M_{32} = \frac{3EI}{L}\theta_3 - \frac{ql^2}{8} \end{cases}$$

- Poutre 3-4 : rigide-articulée sans chargement : $m_{34} = m_{43} = 0$

$$\begin{cases} M_{34} = \frac{3EI}{L}(\theta_3 - \varphi_{34}) + m_{34} - \frac{1}{2} m_{43} \\ M_{43} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} M_{34} = \frac{3EI}{L}\theta_3 - \frac{3EI}{L}\varphi_{12} \\ M_{43} = 0 \end{cases}$$

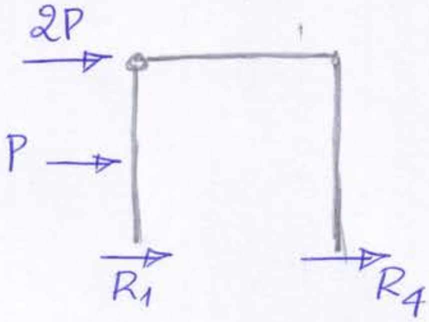
* Equations d'équilibre :

. Equilibre du noeud 3 : $M_{32} + M_{34} = 0$

Cela donne : $\frac{6EI}{L}\theta_3 - \frac{3EI}{L}\varphi_{12} = \frac{ql^2}{8}$

$$6\theta_3 - 3\varphi_{12} = \frac{ql^3}{8EI} \qquad (I)$$

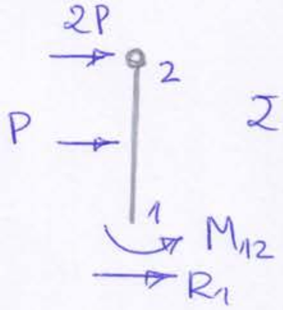
- Equilibre des forces horizontales :



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow 3P + R_1 + R_4 = 0$$

- Expression de la réaction R_1 :

Poutre 1-2

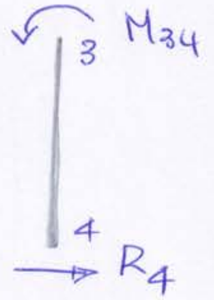


$$\Sigma M_{/2} = 0 \Rightarrow M_{12} + \frac{PL}{2} + R_1 \cdot L = 0$$

$$\Rightarrow R_1 = -\frac{M_{12}}{L} - P/2$$

- Expression de la réaction R_4 :

Poutre 3-4



$$\Sigma M_{/3} = 0 \Rightarrow M_{34} + R_4 \cdot L = 0$$

$$\Rightarrow R_4 = -\frac{M_{34}}{L}$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow 3P - \frac{M_{12}}{L} - P/2 - \frac{M_{34}}{L} = 0$$

$$\frac{5P}{2} - \frac{1}{L}\left[-\frac{3EI}{L}\varphi_{12} + \frac{3PL}{16} + \frac{3EI}{L}\theta_3 - \frac{3EI}{L}\varphi_{12}\right] = 0$$

$$-\frac{3EI}{L}\theta_3 + \frac{6EI}{L}\varphi_{12} = -\frac{37PL}{16}$$

$$\Rightarrow -3\theta_3 + 6\varphi_{12} = -\frac{37PL^2}{16} \quad (II)$$

Les équations (I) et (II) s'écrivent alors :

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \theta_3 \\ \varphi_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{PL^2}{8EI} \\ -\frac{37PL^2}{16EI} \end{Bmatrix}$$

3° Détermination des inconnues :

$$\begin{Bmatrix} \theta_3 \\ \psi_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{27} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1/8 \\ -\frac{37}{16} \end{Bmatrix} \cdot \frac{PL^2}{EI}$$

On trouve : $$\theta_3 = -\frac{11PL^2}{48EI}$$

$$\psi_{12} = \frac{-PL^2}{2EI}$$

4° Détermination des moments et diagrammes :

$$M_{12} = -\frac{3EI}{L} \cdot \psi_{12} + \frac{3PL}{16} = \frac{3EI}{L} \cdot \frac{PL^2}{2EI} + \frac{3PL}{16} = \frac{3PL}{2} + \frac{3PL}{16} = \frac{27PL}{16}$$

$$M_{12} = \frac{27PL}{16}$$

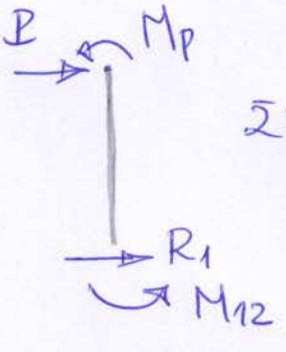
$$M_{32} = \frac{3EI}{L}\theta_3 - \frac{qL^2}{8} = -\frac{3EI}{L} \cdot \frac{11PL^2}{48EI} - \frac{PL}{8} = -\frac{11PL}{16} - \frac{PL}{8} = -\frac{13PL}{16}$$

$$M_{32} = \frac{-13PL}{16}$$

$$M_{34} = \frac{3EI}{L}\theta_3 - \frac{3EI}{L}\psi_{12} = -\frac{3EI}{L} \cdot \frac{11PL^2}{48EI} + \frac{3EI}{L} \cdot \frac{PL^2}{2EI} = \frac{13PL}{16}$$

$$M_{34} = \frac{13PL}{16}$$

Moment M_P sous la charge P horizontale :



$$\Sigma M = 0 \Rightarrow M_P + M_{12} + R_1 \cdot L/2 = 0$$

$$\Rightarrow M_P = -M_{12} - R_1 \cdot L/2$$

$$M_P = -\frac{M_{12}}{2} + \frac{PL}{4} = -\frac{27PL}{32} + PL/4 = -\frac{19PL}{32}$$

$$M_P = -\frac{19PL}{32}$$

Diagramme des moments

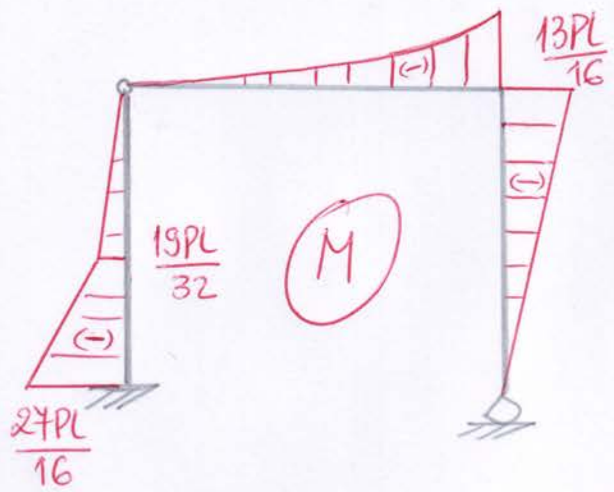


Diagramme des efforts tranchants