Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabes
Département de Génie Civil

Mécanique des Structures — *Section : GCV2*
BEL HADJ ALI N. — *Date : 3 janvier 2013*

Devoir de Synthèse

Durée : 2h00 – Les documents de cours sont autorisés

EXERCICE 1 : (10 POINTS)

On considère le portique de la figure 1. On demande d'analyser cette structure par la méthode des rotations. Les déformations dues à N et T seront négligées.

1. Identifier les ddl (inconnues) de la structure (1pt) ;
2. Ecrire le système à résoudre (4pts) ;
3. Déterminer les inconnues (ddl) (2pts) ;
4. Déterminer les moments aux extrémités des barres et tracer les diagrammes de M et T (3pts).

AN :
H = 5m ; q = 20kN/m

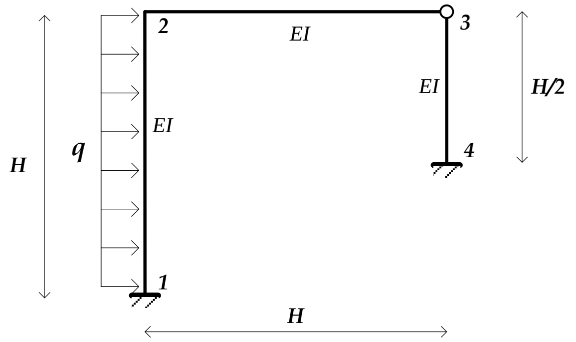


Figure 1.

EXERCICE 2 : (10 POINTS)

On considère la structure de la figure ci-dessous.

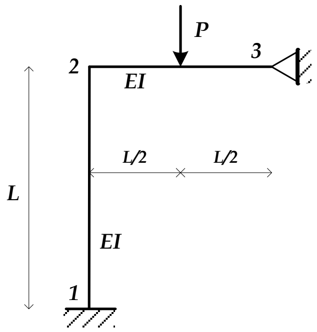


Figure 2.

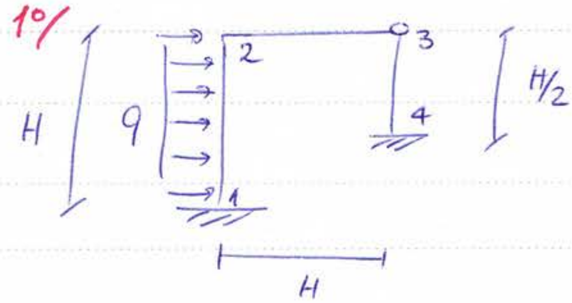
Utiliser la méthode des forces pour tracer les diagrammes du moment de flexion et de l'effort tranchant dans cette structure (On négligera les déformations dues aux efforts normaux et aux efforts tranchants).

Bon Courage

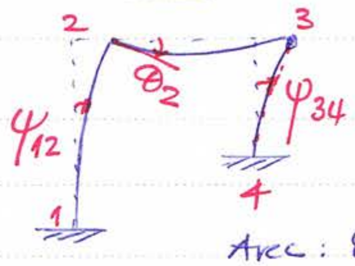
Correction du devoir de synthèse
du 3 janvier 2013

Exercice 1 :

1°/



Déformée probable :



Avec : $\theta_1 = \theta_4 = 0$

$\psi_{23} = 0$

On a : $\psi_{12} = \Delta/H$; $\psi_{34} = \Delta/(H/2)$ $\Rightarrow$ $\psi_{34} = 2 \cdot \psi_{12}$

On a donc 2 inconnues : θ_2 et ψ_{12} $\quad (\psi_{34} = 2\psi_{12})$

2°/ Expression des moments aux noeuds :

Barre 1-2 :

$$M_{12} = \frac{2EI}{H} \cdot (\theta_2 - 3\psi_{12}) - \frac{qH^2}{12}$$

$$M_{21} = \frac{2EI}{H} (2\theta_2 - 3\psi_{12}) + \frac{qH^2}{12}$$

Barre 2-3 :

$$M_{23} = \frac{3EI}{H} (\theta_2)$$

$$M_{32} = 0$$

Barre 3-4 :

$$M_{34} = 0$$

$$M_{43} = \frac{3EI}{H/2} (-\psi_{34}) = -\frac{12EI}{H} \cdot \psi_{12}$$

Le système à résoudre :

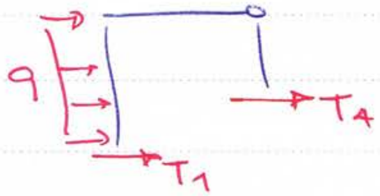
$$\begin{cases} M_{21} + M_{23} = 0 & \text{(Equilibre du noeud 2)} \\ \Sigma F_x = 0 & \text{(Equilibre des forces horizontales)} \end{cases}$$

1ère équation : $M_{21} + M_{23} = 0$

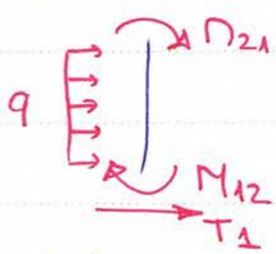
$$\Rightarrow \frac{2EI}{H}(2\theta_2 - 3\psi_{12}) + \frac{qH^2}{12} + \frac{3EI}{H}\cdot\theta_2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{7EI}{H}\cdot\theta_2 - \frac{6EI}{H}\cdot\psi_{12} = -\frac{qH^2}{12} \qquad (1)$$

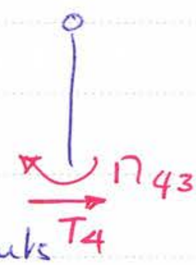
2ème équation : $\Sigma F_x = 0$



Barre 1-2



Barre 3-4



On calcule T_1 en annulant la somme des moments par rapport au noeud 2 :

$$\Sigma M_{/2} = 0 \Rightarrow M_{12} + M_{21} - T_1 \cdot H - \frac{qH^2}{2} = 0 \Rightarrow T_1 = \frac{M_{12}+M_{21}}{H} - \frac{qH}{2}$$

De même pour T_4 : $\Sigma M_{/3} = 0 \Rightarrow T_4 = \frac{M_{43}}{H/2} = 2\cdot\frac{M_{43}}{H}$

L'équation $\Sigma F_x = 0$ donne :

$$T_1 + T_4 + q\cdot H = 0$$

$$\Rightarrow \frac{M_{12}+M_{21}}{H} - qH/2 + 2\cdot\frac{M_{43}}{H} + qH = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{6EI}{H}\cdot\theta_2 + \frac{36EI}{H}\cdot\psi_{12} = \frac{qH^2}{2} \qquad (2)$$

Les deux équations s'écrivent sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -6 & 36 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \psi_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{qH^2}{12} \\ \frac{qH^2}{2} \end{Bmatrix} \cdot H/EI$$

3% Détermination des rotations :

On a :

$$\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -6 & 36 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \psi_{12} \end{Bmatrix} \doteq H/EI \begin{Bmatrix} -\frac{qH^2}{12} \\ qH^2/2 \end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \psi_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{6.36} \begin{bmatrix} 36 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \cdot H/EI \cdot \begin{Bmatrix} -\frac{qH^2}{12} \\ \frac{qH^2}{2} \end{Bmatrix}$$

ce qui donne :

$$\theta_2 = 0 \quad ; \quad \psi_{12} = \frac{qH^3}{72EI} \quad \text{et} \quad \psi_{34} = \frac{qH^3}{36EI}$$

4% Calculons les moments aux extrémités des barres avec $H = 5\,m$ et $q = 20\,kN/m$.

On trouve :

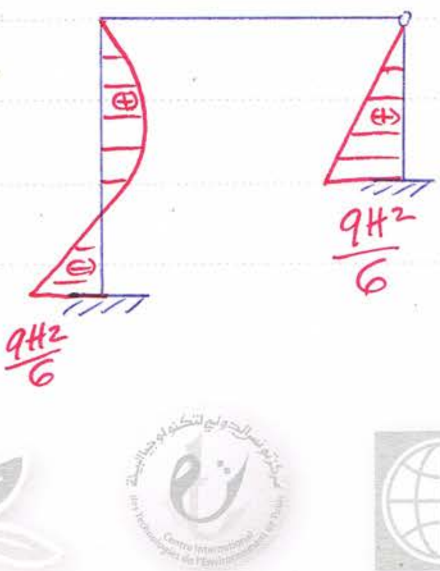
$$M_{12} = -\frac{qH^2}{6} \rightarrow M_{12} = -83{,}33\ kN.m.$$

$$M_{21} = 0$$

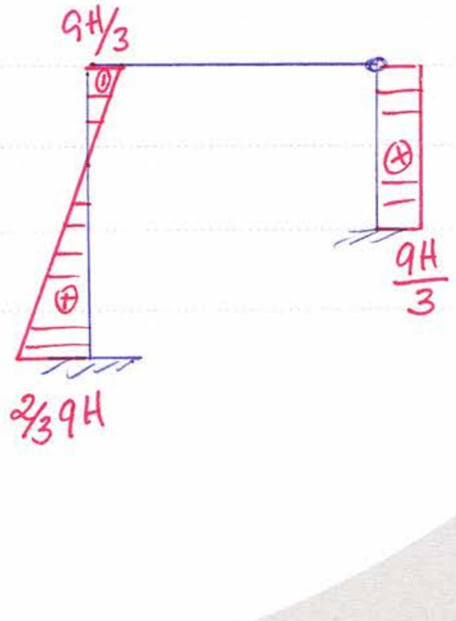
$$M_{23} = 0$$

$$M_{43} = -\frac{qH^2}{6} \rightarrow M_{43} = -83{,}33\ kN.$$

M

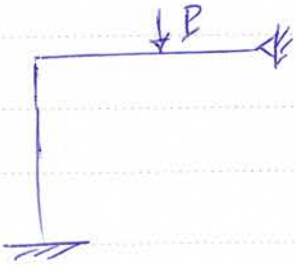


T

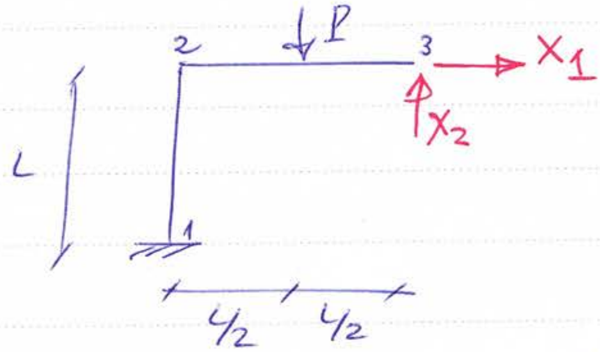


Exercice N°2 :

La structure est hyperstatique de degré 2.



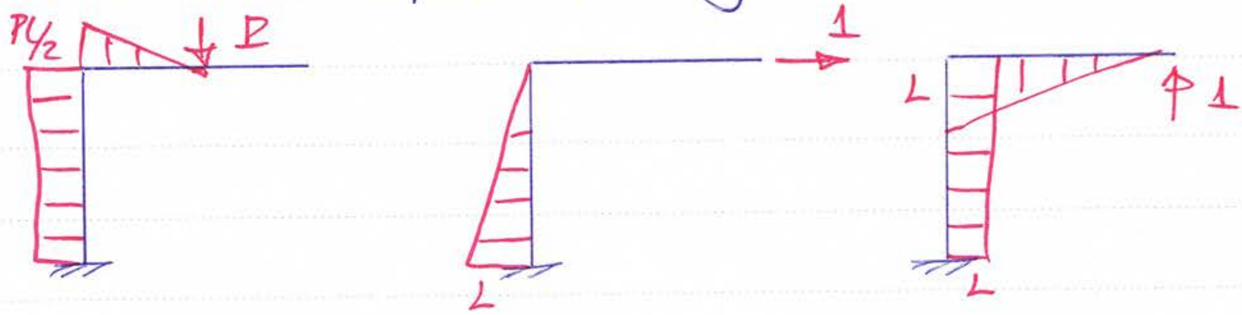
Supprimons l'appui au noeud 3 pour obtenir la structure isostatique équivalente



Avec la condition de compatibilité cinématique suivante :

$$\begin{cases} a_{10} + X_1 \cdot a_{11} + X_2 \cdot a_{12} = 0 \\ a_{20} + X_1 \cdot a_{21} + X_2 \cdot a_{22} = 0 \end{cases}$$

* Détermination des déplacement a_{ij} :



Cause / Effet	P ; a_{10} ; a_{20}	1 ; a_{11} ; a_{21}	a_{22} ; a_{12} ; 1
Sens X_1	$a_{10} = \frac{PL^3}{4EI}$	$a_{11} = L^3/3EI$	$a_{12} = -L^3/2EI$
Sens X_2	$a_{20} = -\frac{29\,PL^3}{48EI}$	$a_{21} = -L^3/2EI$	$a_{22} = \frac{4}{3} \cdot L^3/EI$

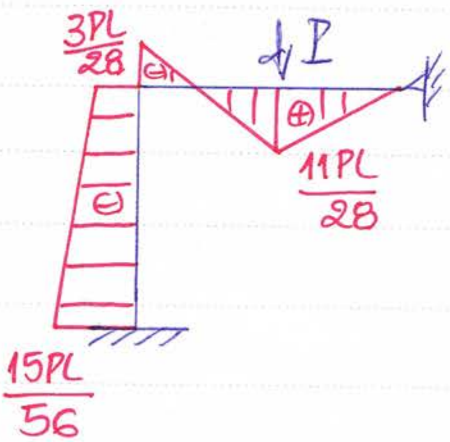
La condition de compatibilité cinématique s'écrit :

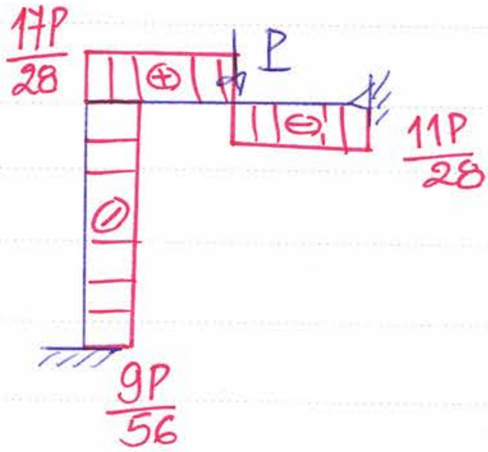
$$\begin{cases} \dfrac{PL^3}{4EI} + X_1 \cdot L^3/3EI - X_2 \cdot L^3/2EI = 0 \\ -\dfrac{29PL^3}{48} - X_1 \cdot \dfrac{L^3}{2EI} + X_2 \cdot 4/3 \cdot L^3/EI = 0 \end{cases}$$

Ce qui donne :
$$\begin{bmatrix} 1/3 & -1/2 \\ -1/2 & 4/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P/4 \\ \dfrac{29P}{48} \end{Bmatrix}$$

On obtient :
$$\begin{cases} X_1 = 9P/56 \\ X_2 = 11P/28 \end{cases}$$

Les diagrammes :





Bel Hadj-Ali Nizar