ENIG

Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabes
Département de Génie Civil

Mécanique des Structures — *Section : GCV2*
BEL HADJ ALI N. — *Date : 07 janvier 2014*

Devoir de Synthèse

Durée : 2h00 – Les documents de cours ne sont pas autorisés (sauf un formulaire A4)

EXERCICE 1 : (05 POINTS)

On considère la structure de la figure ci-dessous.

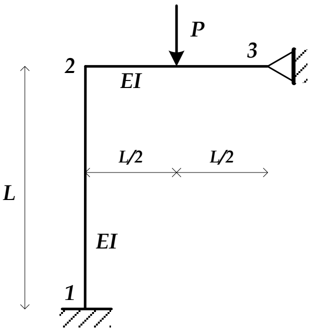


Figure 1.

Déterminer l'expression de la rotation de la section au nœud 2.

EXERCICE 2 : (05 POINTS)

On considère la poutre de la figure ci-dessous.

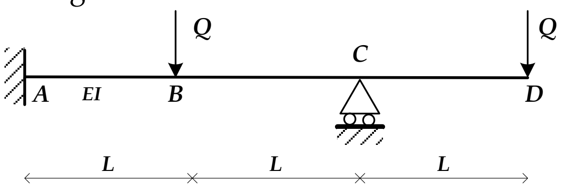


Figure 2.

1. Déterminer l'expression de la réaction d'appui au nœud C. (3pt)
2. Tracer les diagrammes des moments de flexion et des efforts tranchants. (2pt)

EXERCICE 3 : (10 POINTS)

On considère le portique de la figure 3. On demande d'analyser cette structure par la méthode des rotations. Les déformations dues à N et T seront négligées.

1. Identifier les ddl (inconnues) de la structure (1pt) ;
2. Ecrire le système à résoudre (4pts) ;
3. Déterminer les inconnues (ddl) (2pts) ;
4. Déterminer les moments aux extrémités des barres et tracer les diagrammes de M et T (3pts).

AN : L = 5m ; q = 20kN/m

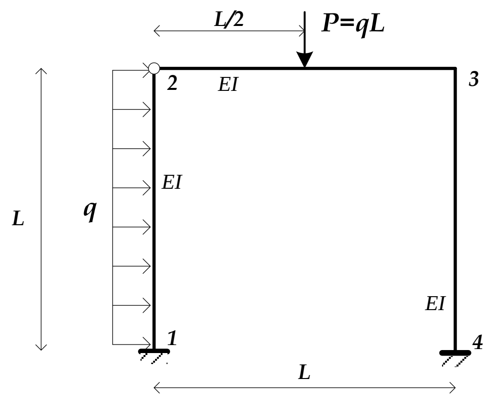


Figure 3.

Bon Courage

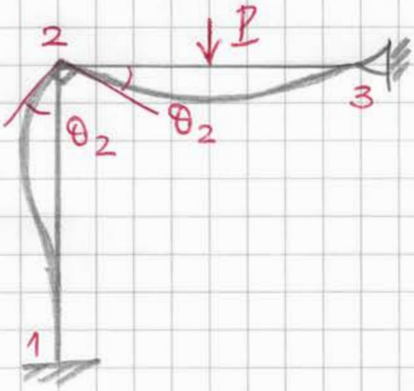
Eléments de Correction

Devoir de Synthèse 07 janvier 2014

Exercice 1 :

La structure est hyperstatique de degré 2.

Pour déterminer l'expression de la rotation au noeud 2, utilisons la méthode des rotations.



θ_1 est nulle

$\varphi_{12} = 0$

$\varphi_{23} = 0$

θ_3 non considérée dans les équations.

Poutre 1-2 :

$$M_{12} = \frac{2EI}{L} \cdot \theta_2$$

$$M_{21} = \frac{4EI}{L} \cdot \theta_2$$

Poutre 2-3 : $m_{23} = PL/8$; $m_{32} = -PL/8$

Poutre avec articulation en fin de barre :

$$M_{23} = \frac{3EI}{L}(\theta_2 - \varphi_{23}) + m_{23} - \frac{1}{2} m_{32} = \frac{3EI}{L}\theta_2 + \frac{3PL}{16}$$

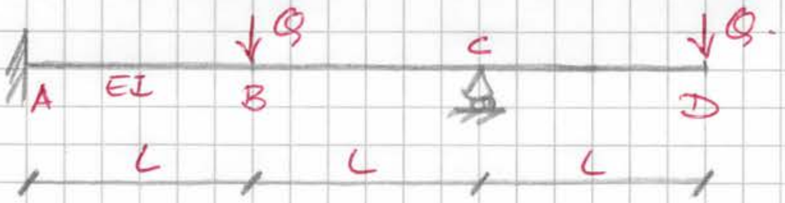
Equilibre des moments au noeud 2 : $M_{21} + M_{23} = 0$.

$$\Rightarrow \frac{4EI}{L}\theta_2 + \frac{3EI}{L}\theta_2 + \frac{3PL}{16} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{7EI}{L} \cdot \theta_2 = -\frac{3PL}{16}$$

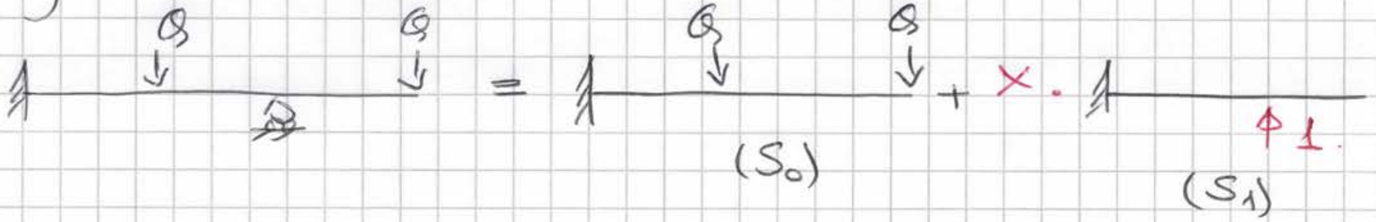
Et donc : $$\theta_2 = -\frac{3PL^2}{112EI}$$

Exercice N°2 :



1° Détermination de l'expression de la réaction d'appui en C :

la structure est hyperstatique de degré 1, utilisons la méthode des forces.



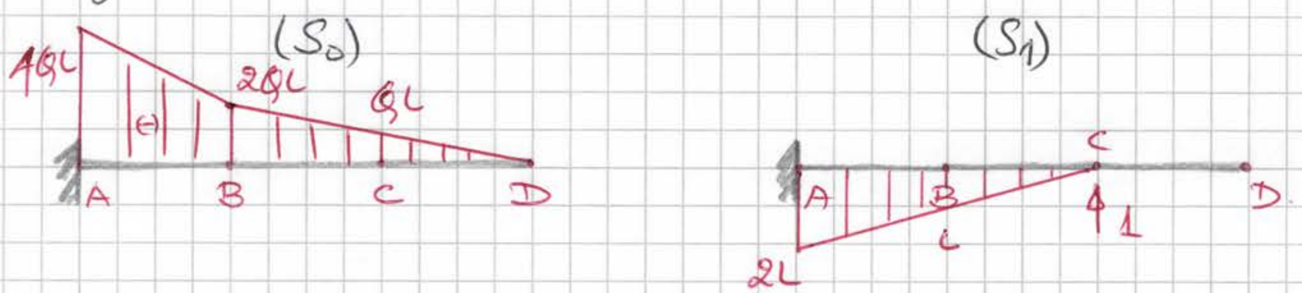
Avec la condition de compatibilité cinématique suivante :

$$a_{10} + X \cdot a_{11} = 0.$$

a_{10} : dép. vertical du noeud C dans la structure (S_0)

a_{11} : " " " " " " " (S_1)

Diagrammes :



$$a_{10} = -\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}\cdot 2L \cdot 4QL + \frac{1}{3}\cdot L \cdot 2QL + \frac{1}{6}\cdot 4QL \cdot L + \frac{1}{6}\cdot 2L \cdot 2QL\right]$$

$$- \frac{1}{EI}\cdot\frac{L}{6}\left(2 \cdot 2QL + QL\right)$$

$$\Rightarrow \quad a_{10} = -\frac{11}{2}\,\frac{QL^3}{EI}$$

$$a_{11} = \frac{2L}{EI}\cdot\frac{1}{3}\cdot 2L \cdot 2L = \frac{8}{3}\,L^3/EI$$

la condition $a_{10} + X \cdot a_{11} = 0$ donne $R_C = \frac{33}{16}\,Q$

les diagrammes s'obtiennent par superposition :

$$M_{(S)} = M_{(S_0)} + X \cdot M_{(S_1)}$$

donc

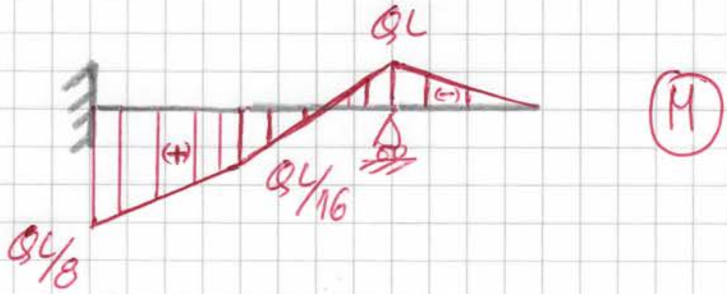
$$M_A = -4QL + \frac{33}{16} Q \cdot 2L = \frac{QL}{8}$$

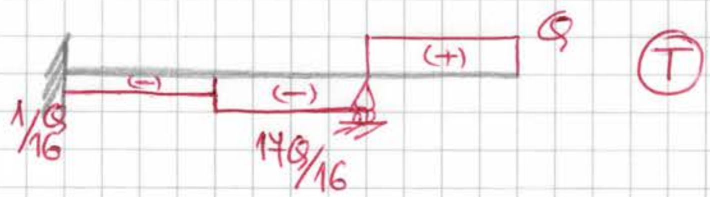
$$M_B = -2QL + \frac{33}{16} Q \cdot L = QL/16$$

$$M_C = -QL$$

$$M_D = 0$$

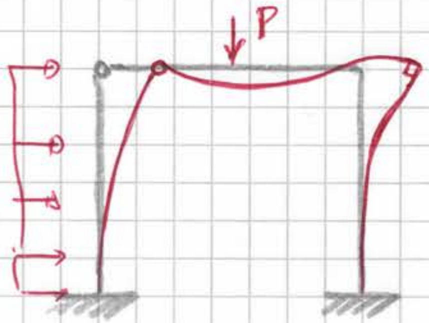
on obtient :





Exercice 3 :

1°_



2 inconnues : θ_3 et φ_{12}

$(\varphi_{12} = \varphi_{34})$

$\theta_1 = \theta_4 = \varphi_{23} = 0.$

2°_ Expressions des moments :

$$\begin{cases} M_{12} = \frac{3EI}{L}\left(-\varphi_{12}\right) + \frac{qL^2}{12} + \frac{1}{2}\,\frac{qL^2}{12} = -\frac{3EI}{L}\varphi_{12} + \frac{qL^2}{8} \\ M_{21} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_{23} = 0 \\ M_{32} = \frac{3EI}{L}\cdot\theta_3 - \frac{PL}{8} - \frac{1}{2}\,\frac{PL}{8} = \frac{3EI}{L}\theta_3 - \frac{3PL}{16} \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_{34} = \frac{2EI}{L}\left(2\theta_3 - 3\varphi_{12}\right) \\ M_{43} = \frac{2EI}{L}\left(\theta_3 - 3\varphi_{12}\right). \end{cases}$$

les équations d'équilibre :

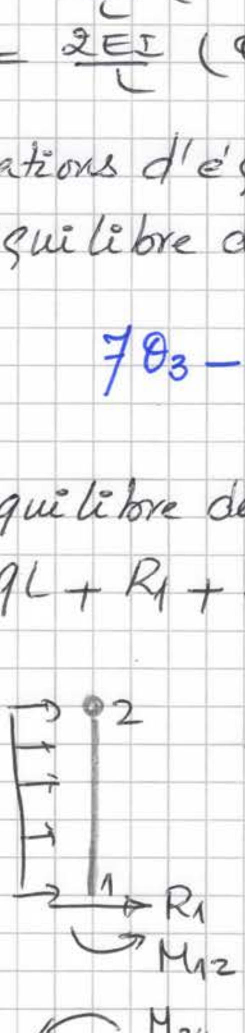
- Equilibre du noeud 3 : $M_{32} + M_{34} = 0.$

$$\Rightarrow \qquad 7\theta_3 - 6\varphi_{12} = \frac{3PL^2}{16\,EI} \qquad (1)$$

- Equilibre des fores horizontales :

$$qL + R_1 + R_4 = 0.$$

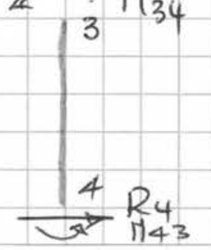
$R_1 = ?$



$$\Sigma M/_2 = 0 \Rightarrow M_{12} + \frac{qL^2}{2} + R_1\cdot L = 0$$

$$\Rightarrow R_1 = -\frac{M_{12}}{L} - \frac{qL}{2}$$

$R_4 = ?$



$$\Sigma M/_3 = 0 \Rightarrow M_{34} + M_{43} + R_4\cdot L = 0$$

$$\Rightarrow R_4 = -\frac{M_{34} + M_{43}}{L}$$

l'équilibre s'écrit alors :

$$qL - \frac{M_{12}}{L} - \frac{qL}{2} - \frac{M_{34}+M_{43}}{L} = 0.$$

$$\Rightarrow \quad M_{12} + M_{34} + M_{43} = \frac{qL^2}{2}.$$

ce qui donne :

$$-\frac{3EI}{L}\varphi_{12} + \frac{qL^2}{8} + \frac{6EI}{L}\theta_3 - \frac{12EI}{L}\varphi_{12} = \frac{qL^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad -6\theta_3 + 15\varphi_{12} = -\frac{3qL^3}{8EI} \qquad (2)$$

Le système à résoudre est donc le suivant :

$$\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -6 & 15 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \theta_3 \\ \varphi_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3qL^3/16EI \\ -\frac{3qL^3}{8EI} \end{Bmatrix}$$

3° Détermination des inconnues :

$$\begin{Bmatrix} \theta_3 \\ \varphi_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{69} \cdot \begin{bmatrix} 15 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 3/16 \\ -3/8 \end{Bmatrix} \cdot \frac{qL^3}{EI}$$

ce qui donne : $\theta_3 = \frac{3}{368}\, qL^3/EI$

$$\varphi_{12} = -\frac{1}{56} \cdot qL^3/EI.$$

4°- les moments sont donc :

$$M_{12} = \frac{5qL^2}{28} \ ; \ M_{32} = -\frac{15}{92}qL^2 \ ; \ M_{34} = \frac{15}{92}qL^2 \ ; \ M_{43} = \frac{27}{184}qL^2$$

le diagramme des moments de flexion est donc le suivant :