

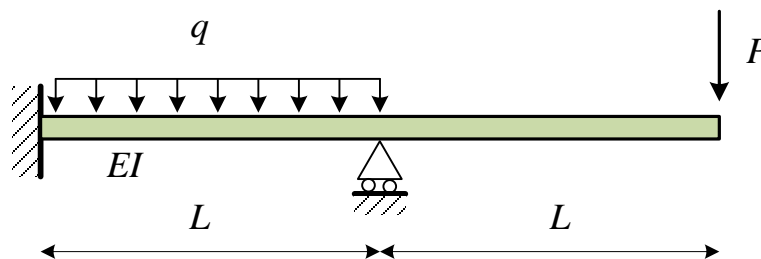


Devoir de Synthèse

Durée : 2h00 – Les documents ne sont pas autorisés

EXERCICE 1 : (7 POINTS)

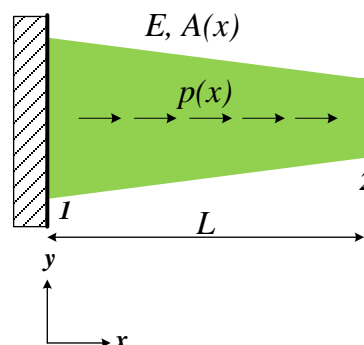
Une poutre droite de section constante est encadrée a son extrémité gauche et repose sur un appui simple à mi-travée (Figure ci-dessous). La poutre a une rigidité flexionnelle EI . La première travée supporte une charge répartie q . La poutre supporte aussi une charge ponctuelle P .



1. Déterminer les expressions des déplacements des nœuds de la structure.
2. Déterminer les expressions des réactions d'appuis.
3. Déterminer l'expression du moment de flexion au droit de l'appui intermédiaire.

EXERCICE 2 : (7 POINTS)

Considérons la structure de la figure ci-dessous :



L'aire de la section droite varie de $2A$ à A entre les sections d'abscisses 0 et L . La barre est aussi soumise à une force uniformément répartie d'intensité linéique $p(x)$ entre les abscisses 0 et L .

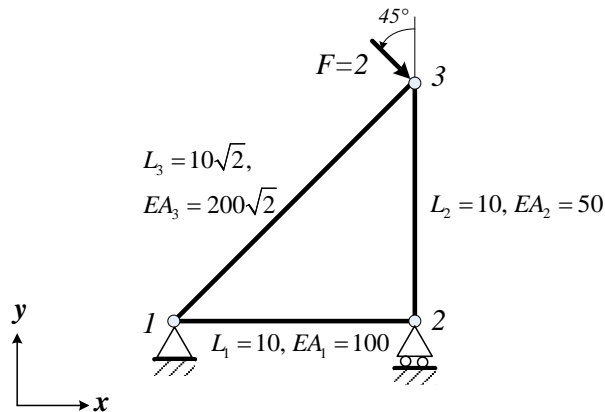
$$A(x) = A\left(2 - \frac{x}{L}\right)$$

$$p(x) = p\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

Déterminer le déplacement suivant x de la section d'abscisse L .

EXERCICE 3 : (6 POINTS)

On considère la structure en treillis de la figure ci-dessous :



La matrice de rigidité de cette structure est donnée par :

$$\begin{bmatrix} 20 & 10 & -10 & 0 & -10 & -10 \\ 10 & 10 & 0 & 0 & -10 & -10 \\ -10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ -10 & -10 & 0 & 0 & 10 & 10 \\ -10 & -10 & 0 & -5 & 10 & 15 \end{bmatrix}$$

La structure est soumise à une force F appliquée au nœud 3 et subit un tassement à l'appui 1 :

$$u_{1,y} = -0.5$$

1. Calculer les déplacements des nœuds de la structure.
2. Déterminer les réactions d'appuis.
3. Calculer l'effort normal dans l'élément 1-3.

DONNEES :

✓ Equation de rigidité pour une poutre bi-encastree :

$$\begin{Bmatrix} N_i \\ T_i \\ M_i \\ N_j \\ T_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\alpha}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{\alpha}_j \end{Bmatrix}$$

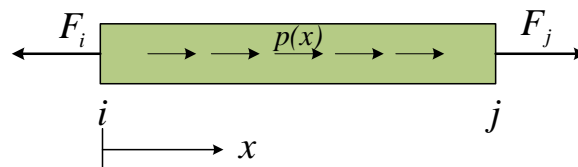
✓ Equation de rigidité pour une poutre articulée-encastree :

$$\begin{Bmatrix} N_i \\ T_i \\ M_i \\ N_j \\ T_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 3EI/L^3 & 0 & 0 & -3EI/L^3 & 3EI/L^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -3EI/L^3 & 0 & 0 & 3EI/L^3 & -3EI/L^2 \\ 0 & 3EI/L^2 & 0 & 0 & -3EI/L^2 & 3EI/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\alpha}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{\alpha}_j \end{Bmatrix}$$

✓ Equation de rigidité pour une poutre encastree-articulée :

$$\begin{Bmatrix} N_i \\ T_i \\ M_i \\ N_j \\ T_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 3EI/L^3 & 3EI/L^2 & 0 & -3EI/L^3 & 0 \\ 0 & 3EI/L^2 & 3EI/L & 0 & -3EI/L^2 & 0 \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -3EI/L^3 & 0 & 0 & 3EI/L^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\alpha}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{\alpha}_j \end{Bmatrix}$$

✓ Pour des éléments barres à deux nœuds :



- Approximation nodale :

$$u(x) = [N_1(x) \quad N_2(x)] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}$$

$$[N] = \begin{bmatrix} \frac{x_j - x}{x_j - x_i} & \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} \end{bmatrix}$$

- Matrice de rigidité et vecteur force :

$$K_e = \int_{x_i}^{x_j} EA [B]^T [B] dx$$

$$F_e = \begin{Bmatrix} -F_i \\ F_j \end{Bmatrix} + \int_{x_i}^{x_j} [N]^T p(x) dx$$

Bon Courage