

Chapitre 2

Analyse des structures isostatiques : Treillis, Poutres et Portiques

1. Introduction

Dans ce chapitre, il s'agit essentiellement de définir les différents paramètres qui interviennent dans la procédure d'analyse des structures isostatiques. Dans un souci de clarté et de simplicité, des systèmes isostatiques simples sont traités d'abord en détail. En particulier, les différents cas de charge courants sont passés en revue. L'extension aux systèmes hyperstatiques fait l'objet des chapitres suivants.

2. Structures isostatiques et hyperstatiques

2.1 Indétermination statique :

Toute structure est soumise à :

- Des charges (forces connues) qui peuvent être des charges permanentes ou des surcharges d'exploitation. Ces charges peuvent être réparties ou concentrées, fixes ou mobiles ;
- Des réactions (forces inconnues) qui sont les actions des appuis sur la structure. Ces réactions peuvent être déterminées à partir des équations de l'équilibre statique.

Pour une structure plane, les conditions d'équilibre statique sont au nombre de trois :

$$\sum F_{ext/x} = 0 \quad ; \quad \sum F_{ext/y} = 0 \quad ; \quad \sum M_{F_{ext}/point} = 0 \quad (2.1)$$

Lorsque la structure étudiée (supposée en équilibre) est composée de différentes membrures, les équations de la statique doivent, bien entendu, être satisfaites pour la structure considérée globalement. En outre, chaque barre, chaque nœud d'assemblage et toute portion de la structure doit, forcément, être en équilibre. Cela signifie que les équations de la statique doivent également être satisfaites pour chaque composant, chaque nœud et chaque portion de la structure étudiée. Or l'analyse d'une structure est généralement menée de façon à calculer les efforts de liaison (réactions) et les efforts internes. Donc, si ceux-ci sont accessibles au départ des seules équations d'équilibre de la statique, la structure est dite *statiquement déterminée*, ou encore, *isostatique*. Si, par contre, les efforts de liaison et/ou les efforts internes ne sont pas accessibles au départ des équations d'équilibre de la statique, la structure est dite *statiquement indéterminée* ou encore, *hyperstatique*.

Par rapport à une structure isostatique, une structure hyperstatique contient un nombre surabondant d'appuis (ou d'inconnues). En d'autres termes, il existe plusieurs façons différentes de réaliser l'équilibre des structures hyperstatiques alors qu'il n'en existe qu'une seule et unique pour les structures isostatiques. Par conséquent, les structures hyperstatiques nécessitent des conditions supplémentaires pour leur résolution (Figure 2.1).



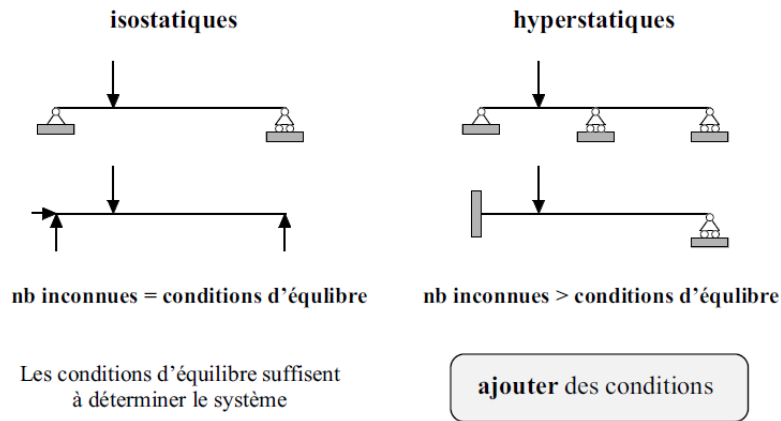


Figure 2.1 – Le nombre d’inconnues est identique aux conditions d’équilibre pour les structures isostatiques (à gauche) alors qu’il est plus grand dans le cas des structures hyperstatiques (à droite).

L’hyperstaticité peut être imputable à différentes causes. On parlera d’hyperstaticité externe si le nombre d’efforts de liaison (réactions) excède le nombre d’équations d’équilibre. Quelques exemples d’hyperstaticité externe sont repris à la Figure 2.2.

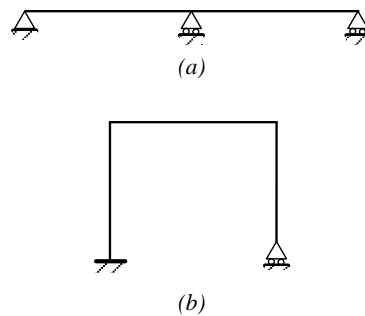


Figure 2.2 – La poutre (a) est une fois hyperstatique et le portique (b) est deux fois hyperstatique (extérieurement).

La résolution complète d’une structure exige non seulement la détermination des réactions d’appuis, mais aussi la détermination des efforts internes en toute section de la structure. Si la connaissance des réactions d’appui permet la détermination des efforts internes en toute section de la structure, on dit que la structure est isostatique intérieurement. Par contre, si la connaissance des réactions d’appui ne permet pas la détermination des efforts internes en toute section de la structure, on dit que la structure est hyperstatique intérieurement.

La structure de la figure 2.3(a) est isostatique extérieurement mais hyperstatique intérieurement, car la détermination préalable des réactions d’appui ne permet pas le calcul des efforts internes dans l’élément *BC*. Une coupure *S* dans l’élément *BC* (figure 2.3(c)) met en évidence trois inconnues (surabondantes). Donc la structure de la figure 2.3 (a) est hyperstatique intérieurement d’ordre 3.

La structure de la figure 2.3(b) est hyperstatique extérieurement d’ordre 3, car on a six réactions d’appui inconnues et trois équations d’équilibre. Cette structure est aussi hyperstatique intérieurement d’ordre 3. Donc, elle est hyperstatique d’ordre 6.



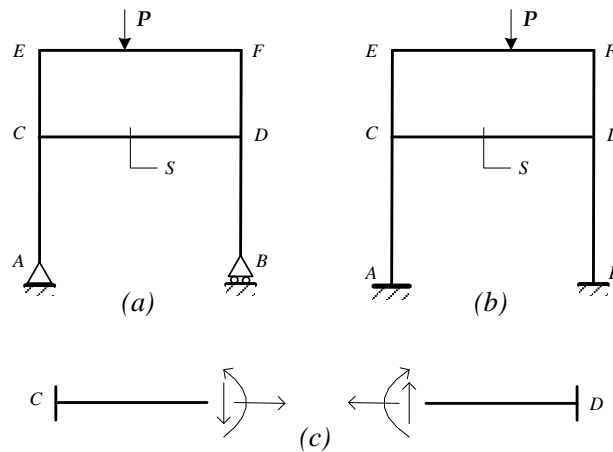


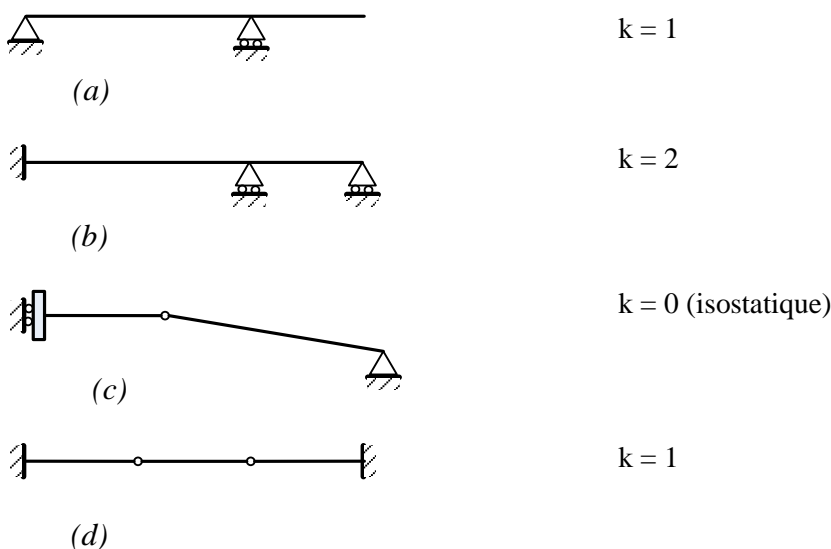
Figure 2.3 – La structure (a) est trois fois hyperstatique et le portique (b) est six fois hyperstatique.

2.2 Détermination du degré d'hyperstaticité :

Une structure peut être plus ou moins hyperstatique dans le sens où elle peut contenir plus ou moins de liaisons surabondantes. Dans un soucis de caractérisation, on définit le degré d'hyperstaticité comme étant le nombre de coupures nécessaire à rendre la structure isostatique. Comme nous le verrons dans le chapitre 5, le degré d'hyperstaticité est une caractéristique centrale pour l'application de la méthode des forces car il correspond directement au nombre d'inconnues nécessaire à la résolution.

Chaque coupure correspondra à la suppression d'un effort interne inconnu (moment de flexion, effort tranchant, effort normal, moment de torsion). Physiquement, cette suppression se matérialise par l'introduction d'une rotule ($M = 0$) ou d'une glissière ($T = 0$ ou $N=0$). Ces dispositifs peuvent être introduits simultanément au droit d'une même section. S'ils correspondent à l'annulation de tous les efforts internes dans cette section, on parlera alors de coupure totale. Le nombre de suppressions nécessaires pour rendre la structure isostatique représente, bien entendu, le degré d'hyperstaticité.

Exemples :



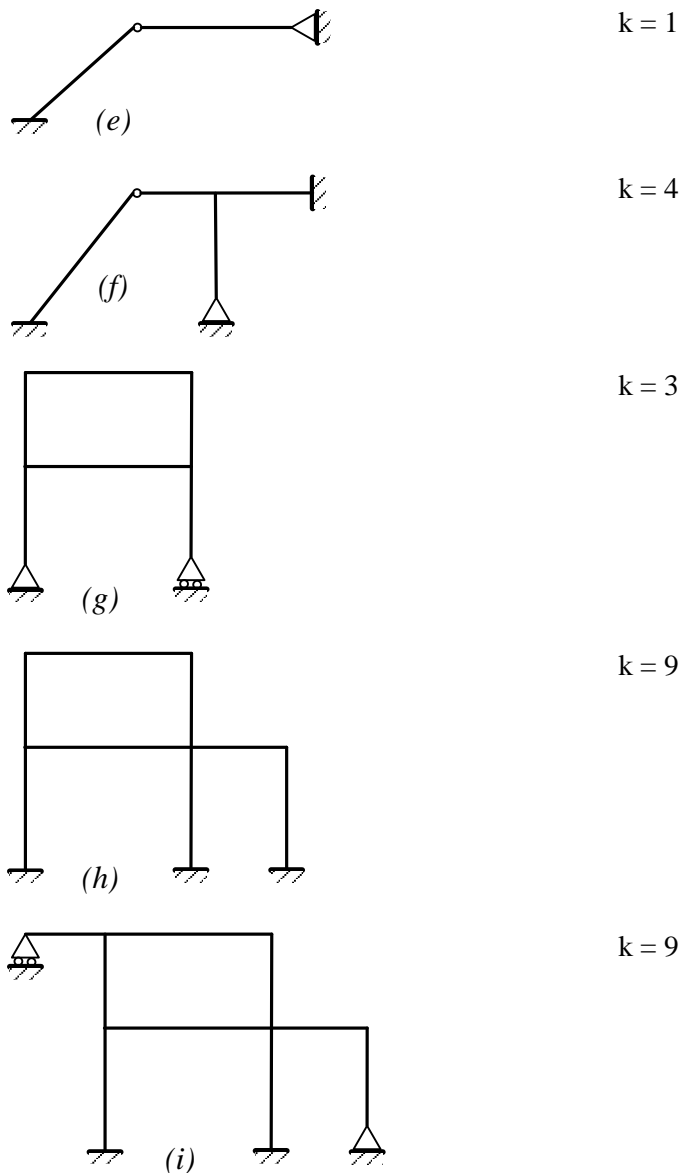


Figure 2.4 – Exemples pour la détermination du degré d’hyperstaticité d’une structure.

3. Les treillis

3.1 Introduction :

Un *treillis* ou *système réticulé* est un système composé de barres droites articulées à leurs extrémités ; On appelle *nœuds* les points d’articulation communes à plusieurs barres.

Un treillis étant une structure légère, il est généralement utilisé pour des portées relativement longues dans les bâtiments et les ponts (figure 2.5).





Figure 2.5 – Exemples de structures en treillis.

On suppose que les forces extérieures sont appliquées aux nœuds. Il en résulte que les barres d’une structure en treillis supportent uniquement des efforts normaux (compression ou traction).

La cellule de base d’un treillis plan est le *triangle* et les trois barres articulées à leurs extrémités (figure 2.6) qui forment une structure stable pouvant supporter des charges. Le treillis de la figure 2.6(b) peut être obtenu par juxtaposition de triangles et on obtient ainsi un *système triangulé*.

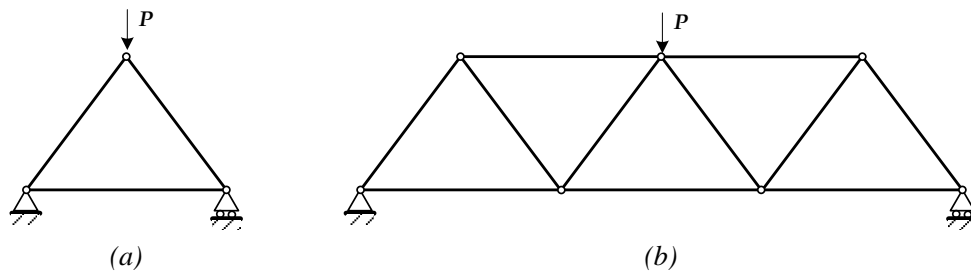


Figure 2.6 – La cellule de base d’un treillis avec un exemple d’une structures en treillis plane.

3.2 Degré d’hyperstaticité d’un treillis plan :

Soit un treillis plan contenant n nœuds et b barres. Pour chaque nœud on peut écrire deux équations d’équilibre. On a donc $2n$ équations d’équilibre. Pour chaque barre, on a une inconnue (l’effort axial dans la barre). Donc, pour b barre, on a b inconnues. Soit e le nombre de composantes des réactions d’appui inconnues (nombre de liaisons avec l’extérieur).

Pour que le treillis soit isostatique, on conclut de ce qui précède que la relation suivante doit être respectée :

$$2n = b + e \quad (2.2)$$

Si $2n < b + e$, le treillis est alors hyperstatique et on définit le degré d’hyperstaticité k comme étant :

$$k = (b + e) - 2n \quad (2.3)$$

Par contre, si $2n > b + e$, le nombre d’équations est supérieur au nombre d’inconnues ; le treillis est alors *instable* et il s’agit d’un mécanisme.

3.3 Analyse des treillis plans isostatiques par la méthode des nœuds :

Dans un treillis, les forces extérieures et les réactions sont appliquées aux nœuds qui sont articulés. Par conséquent, chaque nœud doit être en équilibre sous l’action des forces concourantes qui sont les



forces extérieures, incluant les réactions s'il y a lieu, ainsi que les efforts normaux dans les barres qui aboutissent à ce nœud.

Pour évaluer les efforts dans les barres, on isole un nœud en coupant les barres qui y aboutissent, et l'on écrit les équations d'équilibre pour ce nœud. Les calculs doivent être commencés à un nœud où aboutissent deux barres seulement (cas d'un nœud d'extrémité ou d'appui du treillis). On procède progressivement en isolant les autres nœuds et en écrivant les équations d'équilibre de ces nœuds jusqu'à la détermination des efforts dans toutes les barres.

Equation d'équilibre d'un nœud :

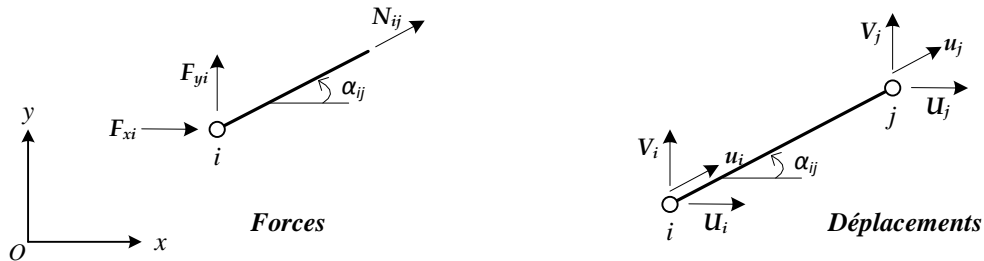


Figure 2.7 – Forces et déplacement dans un élément de treillis.

- Le nœud *i* relie les barres *ij* ;
- F_{xi} et F_{yi} : Forces extérieures appliquées au nœud *i* ;
- α_{ij} : angle d'inclinaison de la barre (*ij*) par rapport à l'axe (Ox) ;
- N_{ij} : effort normal dans la barre (*ij*)

L'équation d'équilibre du nœud *i* de la figure 2.7 s'écrit :

$$\begin{aligned}
 F_{xi} + \sum_{\text{barres } j} N_{ij} \cdot \cos \alpha_{ij} &= 0 \\
 F_{yi} + \sum_{\text{barres } j} N_{ij} \cdot \sin \alpha_{ij} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

Pour une barre de longueur *L*, de section droite *A* et de module d'élasticité *E*, la relation force-déplacement s'écrit dans un repère local rattaché à la barre :

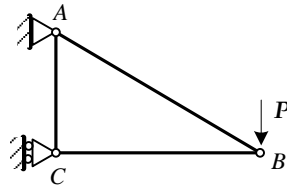
$$N_{ij} = \frac{EA}{L} (u_j - u_i)
 \tag{2.5}$$

Dans un repère global (Oxy), la relation force-déplacement s'écrit :

$$N_{ij} = \frac{EA}{L} \left((U_j - U_i) \cdot \cos \alpha_{ij} + (V_j - V_i) \cdot \sin \alpha_{ij} \right) = 0
 \tag{2.6}$$

Exemple :

Déterminer les efforts dans les barres du treillis ci-dessous ainsi que les déplacements du nœud B.



3.4 Analyse des treillis plans isostatiques par la méthode des sections :

Cette méthode consiste à couper le treillis en deux parties par une section qui coupe les barres dont on veut déterminer les efforts (figure 2.7). On isole l'une des parties, on dénote les efforts inconnus des barres comme des forces extérieures, et l'on montre les forces extérieures appliquées aux nœuds ainsi que les réactions d'appui. On calcule ensuite les efforts inconnus à partir des équations d'équilibre statique.

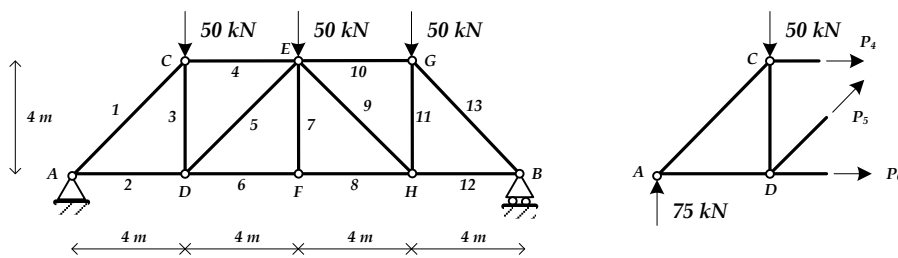


Figure 2.8 – Analyse d'un treillis par la méthode des sections.

La coupe idéale est celle qui ne sectionne que trois barres, puisqu'on n'a que trois équations d'équilibre.

4. Les poutres et portiques

4.1 Les poutres :

Une *poutre simple* ou une poutre dite *simplement appuyée* (figure 2.9(a)) est une poutre d'une seule travée qui s'appuie à ses extrémités sur un appui simple (dit aussi rotule ou articulation) et sur un appui à rouleur (ou appui chariot). L'ensemble de ces deux appuis est souvent désigné par l'expression appuis simples. La portée L de la poutre est la distance entre les axes de ces deux appuis.

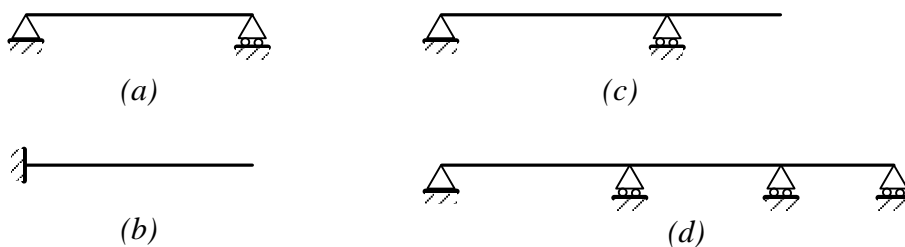


Figure 2.9 – Poutres : différentes configurations.

Une *console* ou *poutre cantilever* (figure 2.9(b)) est une poutre encastrée à une extrémité et libre à l'autre. Le prolongement d'une poutre simplement appuyée au-delà d'un de ses appuis s'appelle un *porte-à-faux* ou un *encorbellement* (figure 2.9(c)).

On appelle *poutre continue* (figure 2.9(d)) une poutre d'un seul tenant appuyée sur une succession d'appuis simples (y compris une articulation pour bloquer la translation). S'il y a $(n+1)$ appuis, on peut

distinguer n tronçons entre deux appuis successifs, que l'on nomme *travées*. Les poutres continues à n travées sont des systèmes hyperstatiques de degré $(n-1)$.

4.2 Les portiques :

On définit un *portique plan* comme étant une structure plane constituée de poutres droites dont les extrémités sont appelées des nœuds. Ceux-ci sont généralement rigides mais ils peuvent aussi être des articulations.

Figure

Soit une structure plane avec :

- n éléments (poutres ou barres) ;
- e liaisons rigides (appuis rigides : encastremets ou liaisons rigide entre deux éléments) ;
- r articulations (avec l'extérieur ou entre éléments du portique) ;
- a appuis chariot

Le degré d'hyperstaticité du portique est alors donné par :

$$k = (3e + 2r + a) - 3n \tag{2.7}$$

Exemples :

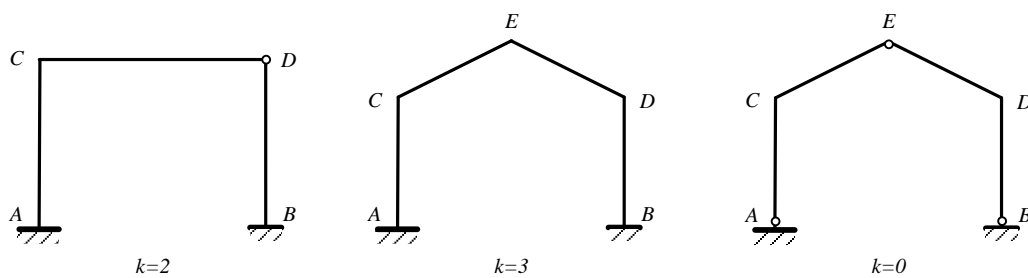
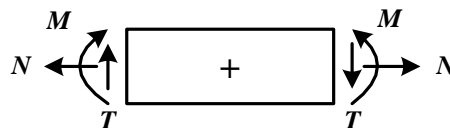


Figure 2.10 – Portiques : différentes configurations.

5. Diagrammes des efforts intérieurs

5.1 Convention de signe :

On adopte dans ce cours la convention de signe suivante : *un moment positif agissant sur une face positive crée des contraintes positives du côté des ordonnées négatives*. Le moment positif tourne ainsi dans le sens trigonométrique et la fibre inférieure de la poutre est tendue.



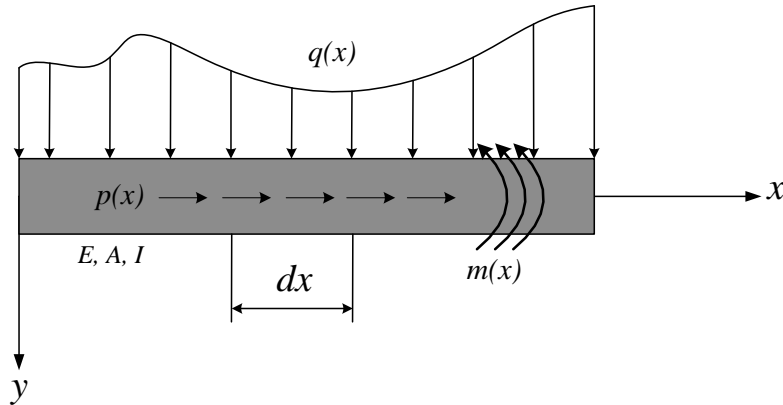
Représentation des moments de flexion :

Bien que parfaitement arbitraire, la convention de représentation des moments de flexion du côté de la fibre tendue est la convention qui sera utilisée dans ce cours. Cette convention permet une compréhension physique du phénomène.



5.2 Relations entre les efforts internes :

Considérons une poutre sollicitée par les charges réparties d'intensité p , q et m (figure ci-dessous).



Compte tenu de ces conventions, les équations différentielles de l'équilibre s'écrivent :

$$\frac{dN}{dx} + p(x) = 0 \quad ; \quad \frac{d^2M}{dx^2} + q(x) = 0 \quad ; \quad \frac{dM}{dx} - T = 0 \quad (2.8)$$

5.3 Étapes du calcul des efforts intérieurs dans une poutre:

1. Remplacer les liaisons par les réactions correspondantes ; Calculer les réactions correspondantes
2. Effectuer, à l'abscisse x , une coupe qui sépare la poutre en deux parties ;
3. Représenter l'effet d'une partie sur l'autre au moyen des efforts intérieurs, N , T et M
4. Déterminer ces efforts intérieurs en exprimant les conditions d'équilibre.

5.4 Quelques particularités des diagrammes de N , T et M :

