

# Chapitre 1

## Théorie générale de la flexion des plaques

### 1. Introduction

Une plaque mince est un solide limité par deux plans parallèles voisins d'équations,  $z = \pm t/2$ , et par une surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à  $Oz$ . Le plan  $Oxy$  est le **plan moyen** (ou feuillet moyen) de la plaque. L'**épaisseur**  $t$  de la plaque est supposée petite devant les dimensions mesurées dans le plan moyen.

Les plaques peuvent être classées en trois groupes : les **plaques minces à petites déformations**, les **plaques minces à grandes déformations** et les **plaques épaisses**. Le critère souvent utilisé pour définir une plaque mince (pour des raisons propres de calcul) est le rapport entre l'épaisseur et la plus petite dimension transversale. Pour qu'une plaque soit considérée comme mince, ce rapport ne doit pas dépasser  $1/20$ . Nous ne considérons dans ce cours que les plaques minces à petites déformations; une simplification qui se justifie par la magnitude des déformations couramment rencontrées dans les structures en plaques.

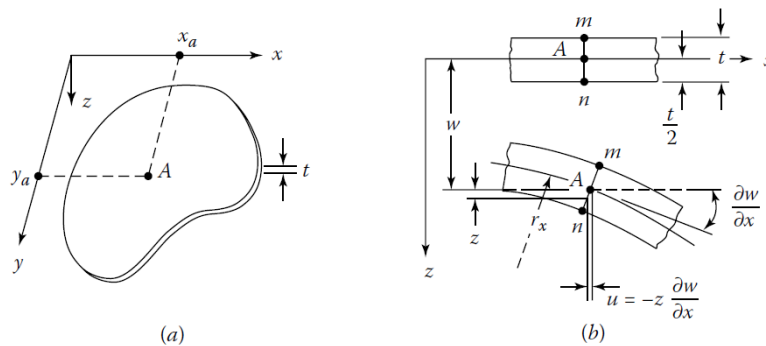


Figure 1.1 – Schéma d'une plaque mince avant et après déformation

### 2. Comportement générale des plaques :

Considérons la plaque non chargée de la figure 1.1(a) pour laquelle le plan  $xy$  coïncide avec le plan moyen et donc l'ordonnée  $z$  est égale à zéro. Les composantes du déplacement en un point, suivant les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$ , sont dénotées  $u$ ,  $v$  et  $w$ , respectivement. Quand une charge latérale engendre une déformation de la plaque, la surface médiane à un point  $A(x_a, y_a)$  se déplace de  $w$  (Fig. 1.1(b)). Les hypothèses fondamentales de la théorie de flexion avec petites déformations des plaques minces, isotropes, homogènes et élastiques sont basées sur la géométrie des déformations. Ces hypothèses peuvent s'énoncer comme suit:



1. La flèche de la surface médiane  $w$  est très faible par rapport à l'épaisseur de la plaque  $h$ . La pente de la surface fléchie est par conséquent très petite et le carré de la pente est une quantité négligeable devant l'unité.
2. Le plan moyen reste indéformée pendant la flexion. ( $u(x, y, 0) = v(x, y, 0) = 0$ )
3. Une section de la plaque normale à son plan moyen reste plane après déformation. Cela veut dire que les déformations de cisaillement vertical  $\gamma_{xz}$  et  $\gamma_{yz}$  sont négligeables. Il est aussi déduit que la déformation normale  $\varepsilon_z$  résultant des charges transversales peut être omise.
4. La contrainte normale  $\sigma_z$ , sur tout élément parallèle au plan moyen peut être négligée.

Les hypothèses ci-haut, connue comme les **hypothèses de Kirchhoff** sont analogues à celles associée à la théorie de flexion des poutres. Leur validité à été démontrée à travers des essais à petite et à grande échelle. Dans la majorité des applications en ingénierie, des justifications adéquates peuvent être trouvées par rapport aux simplifications liées à l'état des contraintes et des déformations. Les simplifications, un problème tridimensionnel de plaque peut être réduit à un problème à deux dimensions uniquement. En conséquence, les équations gouvernantes de la flexion des plaques peuvent être écrites de manière concise et simple.

### 3. Champs des déformations - Relations cinématiques :

Afin d'aborder le problème de flexion des plaques, nous nous intéressons en premier lieu à la géométrie des déformations. En conséquence à l'hypothèse 3 du paragraphe précédent, les relations déformation-déplacement peuvent s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

L'hypothèse 3 permet de dire que la flèche  $w$  ne varie pas le long de l'épaisseur de la plaque. De plus les déformations  $\gamma_{xz}$  et  $\gamma_{yz}$  étant nulles, nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned} w &= w(x, y) \\ u &= -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad ; \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.2)$$

En remplaçant les expressions de l'équation (1.2) dans les équations (1.1) nous obtenons:

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad ; \quad \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad ; \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (1.3)$$

### 4. Champs des contraintes :

Dans le cas général d'un état de contraintes tridimensionnelles, les contraintes et les déformations sont liés par la loi de Hooke généralisée, valable pour un matériau isotrope homogène:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \right] \quad ; \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z) \right] \quad ; \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \right] \quad ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \end{aligned} \quad (1.4)$$



Dans ces équations :  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$  ( $i, j = x, y, z$ ). Les constantes  $E$ ,  $\nu$  et  $G$  représentent le module d'élasticité, le coefficient de Poisson et le module de cisaillement élastique, respectivement. La relation entre ces quantités s'écrit :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.5)$$

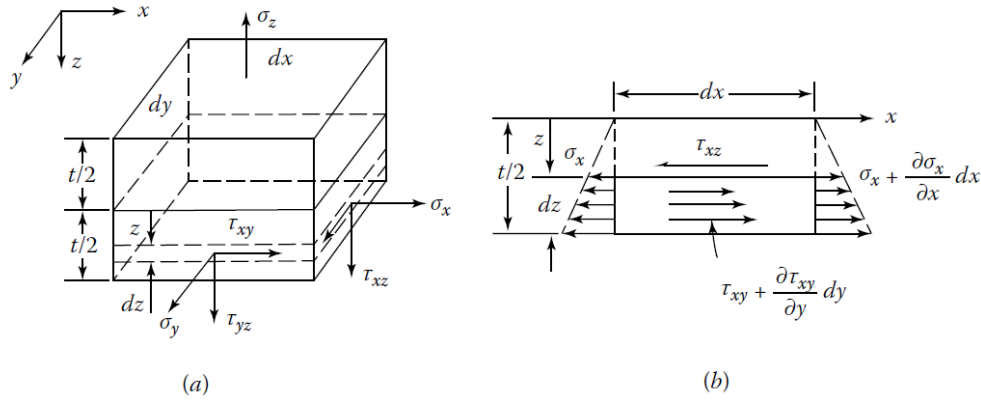


Figure 1.2 – Contraintes appliquées sur un tronçon de plaque

**Notation :**

La notation en double indice pour les contraintes est interprétée comme suit : le premier indice indique la direction de la normale à la face sur laquelle la composante de la contrainte est appliquée. le second indice est relié à la direction de la contrainte elle-même. Les indices répétés seront simplifiés. En effet, les contraintes normales  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}$  et  $\sigma_{zz}$  seront notées  $\sigma_x, \sigma_y$  et  $\sigma_z$ . Une face (ou un plan) est habituellement identifiée par l'axe lui est normal, e.g. la face  $x$  est perpendiculaire à l'axe  $x$ .

**Convention de signe :**

La convention de signe pour les contraintes se base sur la relation entre la direction de la normale sortante à une face et la direction de la contrainte appliquée sur la même face. La contrainte est positive si les deux directions coïncident. Sur cette base, toutes les contraintes représentées sur la figure 1.2 sont positives.

En considérant que  $\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$ , les équations (1.4) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} \end{aligned} \quad (1.6)$$

En considérant les relations cinématiques, les contraintes peuvent alors s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= -\frac{E z}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\
 \sigma_y &= -\frac{E z}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\
 \tau_{xy} &= -\frac{E z}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

On observe à la base de ces formules que les contraintes sont nulles dans le plan moyen et varie linéairement sur l'épaisseur de la plaque.

Les contraintes distribuées sur l'épaisseur de la plaque produisent des moments de flexion, des moments de torsion et des forces verticales de cisaillement. les résultantes (moments et forces) par unité de longueur peuvent s'écrire :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \tag{1.8}$$

avec  $M_{xy} = M_{yx}$ . De même :

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz \tag{1.9}$$

La convention de signe pour les forces de cisaillement est la même que pour les contraintes de cisaillement. Un moment de flexion positif est celui qui produit des contraintes positives dans la moitié inférieure de la plaque.

En substituant les équations (1.7) dans les équations (1.8), nous obtenons les expressions suivantes pour les moments de flexion et de torsion en fonction de la flèche:

$$\begin{aligned}
 M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\
 M_y &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\
 M_{xy} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Le paramètre  $D$  étant la rigidité flexionnelle de la plaque.

$$D = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} \tag{1.11}$$

Les composantes de contraintes peuvent s'écrire en fonction des moments de la manière suivante:



$$\sigma_x = \frac{12M_x z}{t^3} \quad ; \quad \sigma_y = \frac{12M_y z}{t^3} \quad ; \quad \tau_{xy} = \frac{12M_{xy} z}{t^3} \quad (1.12)$$

### 5. Equations d'équilibre d'une plaque :

Les composantes des différentes contraintes (et leurs résultantes) varient généralement d'un point à l'autre d'une plaque chargée. Ces variations sont gouvernées par les *équations d'équilibre* de la statique.

Considérons un élément  $dx dy$  de la plaque uniformément chargée de la figure 1.3.

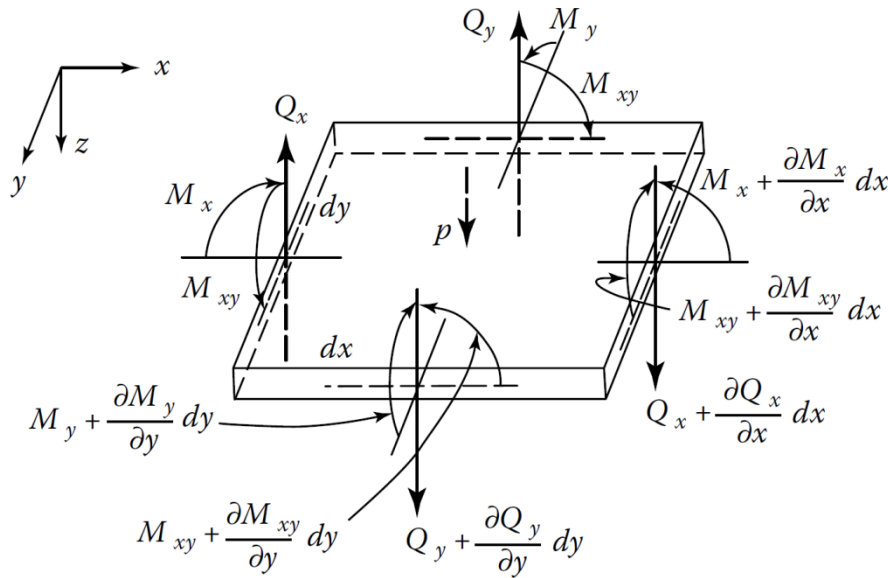


Figure 1.3 – Résultantes positives et charge sur un élément de plaque

La somme des forces dans la direction  $z$  est nulle, ce qui s'écrit :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dx dy + p dx dy = 0 \quad (1.13)$$

Ce qui se traduit par :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0 \quad (1.14)$$

L'équilibre des moments autour de l'axe  $x$  s'écrit :

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy + \frac{\partial M_y}{\partial y} dx dy - Q_y dx dy = 0 \quad (1.15)$$

Ce qui donne :

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \quad (1.16)$$

Dans ces expressions, le produit des quantités infinitésimales, comme le moment dû à  $p$  et le moment dû à la variation de  $Q_y$  sont omis.



De la même manière, l'équilibre des moments autour de l'axe  $y$ , nous permet d'écrire que :

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0 \quad (1.17)$$

Finalement, en introduisant les expressions de  $Q_x$  et  $Q_y$  nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p \quad (1.18)$$

Cette expression représente *l'équation différentielle de l'équilibre* des plaques minces.

Les expressions des forces de cisaillement peuvent alors s'écrire en fonction de la flèche  $w$ , en se basant sur les équations (1.16) et (1.17) :

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w)$$

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) \quad (1.19)$$

**Remarque :**

On a trois équations d'équilibre pour cinq grandeurs inconnues ( $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$ ,  $Q_x$  et  $Q_y$ ). Le problème est hyperstatique et pour lever l'indétermination il faut tenir compte des déformations.

## 6. Equation gouvernante de la flexion des plaques :

L'équation différentielle qui gouverne la flexion des plaques peut être obtenue en utilisant les résultats des sections précédentes. Introduisons les expressions de  $M_x$ ,  $M_y$  et  $M_{xy}$  dans l'équation (1.18), nous obtenons :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \quad (1.20)$$

Cette équation présentée par Lagrange en 1811, peut s'écrire sous la forme compacte suivante:

$$\nabla^4 w = \frac{p}{D} \quad (1.21)$$

L'équation de Lagrange est l'équation différentielle gouvernante de la flexion des plaques minces. Pour déterminer la flèche  $w$ , il est nécessaire d'intégrer cette équation en utilisant les conditions aux limites appropriées.

## 7. Conditions aux limites :

L'équation différentielle de la surface élastique admet une infinité de solutions. La solution réelle d'un problème donné sera celle qui remplit les conditions au contour. Nous nous bornerons à l'examen de plaques à contour polygonal et nous prendrons l'axe des  $y$  parallèle au bord considéré d'équation  $x = a$ . De plus, les conditions imposées sur un bord d'une plaque peuvent toujours se ramener à des



conditions imposées à la flèche  $w(x, y)$  puisque les composantes des efforts et des moments de flexion ( $Q_x, Q_y, M_x, M_y$  et  $M_{xy}$ ) sont des fonctions des dérivées partielles de  $w(x, y)$ .

Considérons une plaque rectangulaire et étudions les différentes situations les plus fréquemment rencontrées.

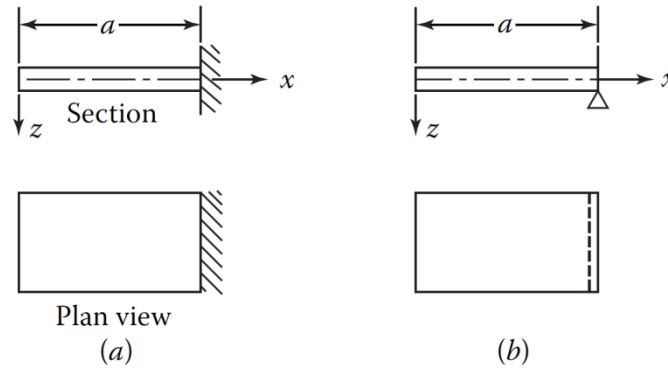


Figure 1.4 – Conditions aux limites : (a) bord encastré; (b) bord simplement appuyé

✓ **Bord encastré**

Si le bord d'une plaque est encastré, la flèche le long de ce bord est nulle et le plan tangent à la surface moyenne fléchie, le long de ce bord, coïncide avec la position initiale du plan moyen de la plaque. La rotation est donc nulle le long de ce bord.

Si le bord  $x = a$  est encastré, les conditions aux limites sont formulées comme suit :

$$w(a, y) = 0 \quad ; \quad \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a} = 0 \quad (1.22)$$

✓ **Bord simplement appuyé**

Si le bord  $x = a$  de la plaque est simplement appuyé, la flèche le long de ce bord est nulle. En plus, ce bord peut tourner librement autour de l'axe  $x$  c'est à dire qu'il n'existe pas de moment de flexion  $M_x$  le long de ce bord. Comme la flèche  $w$  est identiquement nulle le long du côté, ses dérivées en  $y$  le sont également et l'on a les conditions suivantes :

$$w(a, y) = 0 \quad ; \quad \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=a} = 0 \quad (1.23)$$

✓ **Bord libre**

Sous la forme proposée par Poisson, les conditions aux limites pour ce cas stipule que le moment de flexion  $M_x$  doit être nul. L'effort tranchant  $Q_x$  et le moment de torsion  $M_{xy}$  devraient l'être aussi. Kirchhoff trouva que ces trois conditions étaient de trop et que deux suffisaient pour déterminer complètement la flèche. Il a démontré que les deux conditions de Poisson relatives au moment de torsion  $M_{xy}$  et à l'effort tranchant  $Q_x$  pouvaient être remplacées par une seule condition aux limites (exprimant l'annulation de la réaction totale).

$$M_x = 0 \quad ; \quad V_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (x = a) \quad (1.24)$$

Ce qui peut s'écrire en fonction des dérivées partielles de la flèche  $w$  comme suit:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad (x = a) \quad (1.25)$$



## 8. Théorie exacte des plaques :

Rappelons que dans le cadre de la théorie de flexion des poutres, l'effet de l'effort tranchant sur les déformations et les contraintes est relativement insignifiant et peut être négligé si la hauteur de la poutre est petite comparée à sa portée. Cette même conclusion est valable dans le cas des plaques. Cependant, il est important de noter que dans les problèmes de vibration et de propagation des ondes, l'effet du cisaillement est d'une grande importance pour les poutres et les plaques qu'elles soient élancées ou pas.

La théorie exacte des plaques est exclusivement gouvernée par la théorie de l'élasticité. Dans le cas d'une flexion de plaque engendrant un état de contrainte plane, la solution générale issue de la théorie exacte des plaques coïncide avec la solution obtenue par la théorie classique des plaques.

La résolution rigoureuse d'autres configurations indique que la théorie classique des plaques mince est suffisamment précise pour les cas usuels rencontrés en pratique, avec les exceptions suivantes :

- ✓ Dans la proximité d'importantes charges concentrées ;
- ✓ Dans des zones limitées des bords, particulièrement à proximité des coins des plaques et autour des ouvertures

## 9. Méthode d'analyse des problèmes de plaques :

En dehors de quelques configurations simples de chargement et de forme, comme pour des plaques circulaires avec chargement axisymétrique, l'équation gouvernante de la flexion des plaques,  $\nabla^4 w = p/D$ , reste difficile à résoudre. Il est courant d'envisager une résolution par la méthode inverse. La méthode inverse repose sur l'établissement d'une solution supposée pour la flèche  $w$  qui vérifie l'équation gouvernante et satisfait les conditions aux limites. Certains cas peuvent être traités en considérant une expression polynomiale pour la flèche avec des coefficients à déterminer. L'utilisation des séries de Fourier est aussi envisageable. Les méthodes énergétiques sont aussi couramment utilisées, Ces méthodes peuvent même être utilisées pour développer des solutions sous la forme de séries infinies.

