

Chapitre 2

Plaques rectangulaires

1. Introduction

Nous avons présenté dans le chapitre précédent comment résoudre d'une manière générale les problèmes de flexion des plaques minces. On est ramené généralement à l'intégration d'équations différentielles linéaires dont les solutions sont fonction de deux variables, la forme générale de ces équations différentielles est l'équation de Lagrange :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D} \quad (2.1)$$

Nous présenterons dans ce chapitre deux méthodes usuelles de détermination de la solution de l'équation de Lagrange dans le cas de flexion de plaques rectangulaires à conditions aux limites variables, celles de Navier et de Lévy. Ces deux méthodes peuvent être appliquées lorsque l'intégration de l'équation de Lagrange n'est pas possible directement.

2. La méthode de Navier (solution par des séries doubles)

En 1820, Navier présenta un papier à l'Académie Française des Sciences où il propose une solution au problème de flexion des plaques rectangulaires simplement appuyées en utilisant une double série trigonométrique.

Considérons une plaque rectangulaire de cotés a et b , simplement appuyée sur son contour et soumise à une charge uniformément répartie $p(x,y)$. L'origine du système de coordonnées étant placée à l'extrémité supérieure gauche de la plaque comme montré à la figure 2.1.

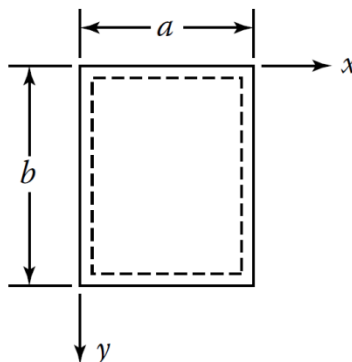


Figure 2.1 – Plaque rectangulaire simplement appuyée

Les conditions de bords pour une plaque simplement appuyée sont les suivantes :

$$w = 0 \Big|_{x=0,a} ; \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \Big|_{x=0,a} ; \quad w = 0 \Big|_{y=0,b} ; \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \Big|_{y=0,b} \quad (2.2)$$

Dans ce cas, la solution de l'équation différentielle gouvernante (Eq.2.1), c.-à-d., l'expression de la flèche $w(x,y)$ et de la distribution de la charge surfacique $p(x,y)$ doivent être vu sous la forme d'une série de Fourier infinie, comme suit :

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (2.3)$$

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (2.4)$$

Ici A_{mn} et p_{mn} représentent des coefficients à déterminer. Il est facile de vérifier que l'expression de la flèche donnée dans l'équation 2.3 vérifie les conditions aux limites définies par les équations 2.2.

Considérons une configuration générale de charge. Pour déterminer les coefficients de Fourier p_{mn} , chaque partie de l'équation 2.4 est multiplié par $\sin\left(\frac{l\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{k\pi y}{b}\right)$ puis on intègre deux fois entre 0 et a et 0 et b.

$$\int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin\left(\frac{l\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{k\pi y}{b}\right) dx dy = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \int_0^a \int_0^b \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{l\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{k\pi y}{b}\right) dx dy \quad (2.5)$$

Il est possible de vérifier que :

$$\int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi x}{a}\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq l \\ a/2 & \text{si } m = l \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{k\pi y}{b}\right) dy = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq k \\ b/2 & \text{si } n = k \end{cases}$$

Les coefficients de la série de Fourier sont donc données par :

$$p_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy \quad (2.7)$$

Les coefficients de la série représentant la flèche de la plaque doivent satisfaire l'équation de Lagrange, ce qui donne :



$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 - \frac{P_{mn}}{D} \right] \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right) = 0 \quad (2.8)$$

Cette équation doit être vérifiée pour n'importe quelles valeurs de x et y ce qui n'est possible que si :

$$A_{mn} \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \frac{P_{mn}}{D} = 0 \quad (2.9)$$

D'où :

$$A_{mn} = \frac{1}{\pi^4 D} \frac{P_{mn}}{\left(m^2/a^2 + n^2/b^2 \right)^2} \quad (2.10)$$

L'équation complète pour la flèche de la plaque s'écrit :

$$A_{mn} = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{mn}}{\left(m^2/a^2 + n^2/b^2 \right)^2} \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \quad (2.11)$$

Les coefficients A_{mn} étant déterminés, la solution de l'équation de Lagrange est ainsi définie par l'équation 2.11 et on peut en déduire ensuite les expressions des efforts intérieurs par dérivation conformément aux relations démontrées dans le chapitre précédent.

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} \frac{\left[(m/a)^2 + \nu(n/b)^2 \right]}{\left[(m/a)^2 + (n/b)^2 \right]^2} \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right), \\ M_y &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} \frac{\left[(n/b)^2 + \nu(m/a)^2 \right]}{\left[(n/b)^2 + (m/a)^2 \right]^2} \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right), \\ M_{xy} &= -\frac{1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} \frac{mn}{ab \left[(m/a)^2 + (n/b)^2 \right]^2} \cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Remarque :

Généralement, la solution avec la série trigonométrique infinie converge rapidement, une approximation satisfaisante peut être obtenue en considérant quelques termes seulement.

Puisque les moments et les efforts résultants sont obtenus moyennant les dérivées secondes et tierces de la flèche, la convergence des expressions de la série pour les moments et les efforts résultants est moins rapide spécialement à proximité des bords de la plaque. L'exactitude de la solution et la vitesse de convergence des expressions de la série trigonométrique peuvent être améliorés en considérant un plus grand nombre de termes dans le développement utilisé.



3. La méthode de Lévy (solution par des séries simples)

En 1900, Lévy a proposé une méthode pour l'analyse de la flexion des plaques rectangulaires ayant deux bords opposés simplement appuyés et avec des conditions d'appui quelconques pour les deux autres bords. Lévy propose l'utilisation d'un développement en séries de Fourier simples.

La méthode proposée par Lévy s'avère plus pratique que celle proposée par Navier. D'une part, les calculs numériques sont plus simples quand il s'agit d'une série simple. D'autre part, la méthode de Lévy s'applique à la flexion des plaques avec une plus grande variété de conditions de bord.

Lévy présente une solution de l'équation de Lagrange exprimée comme la somme d'une partie complémentaire w_h et d'une partie particulière w_p . Chacune de ces deux parties consiste en une série de Fourier simple.

$$w = w_h + w_p \quad (2.13)$$

Considérons maintenant une plaque reposant sur des appuis simples le long des bords $x=0$ et $x=a$. Les deux autres bords $y=0$ et $y=b$ étant appuyée d'une manière quelconque. On suppose que la plaque est soumise à une charge surfacique quelconque $p(x,y)$.

Les conditions de bord au niveau des cotés simplement appuyée s'écrivent :

$$w = 0 \Big|_{x=0,a} \quad \text{et} \quad M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \Big|_{x=0,a} \quad (2.14)$$

Comme expliquée précédemment la deuxième condition aux limites peut s'écrire plus simplement :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \Big|_{x=0,a} \quad (2.15)$$

Selon la proposition de Lévy, la solution complémentaire est prise égale à :

$$w_h = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (2.16)$$

f_m est une fonction dépendant de y seulement ; w_h satisfait les condition aux bords simplement appuyés (Eq. 2.14). En insérant l'expression de w_h dans l'équation différentielle homogène donne :

$$\left[\frac{d^4 f_m(y)}{dy^4} - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2 f_m(y)}{dy^2} + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 f_m(y) \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) = 0 \quad (2.17)$$

Cette équation est valable si la quantité entre parenthèses est nulle :

$$\frac{d^4 f_m(y)}{dy^4} - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2 f_m(y)}{dy^2} + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 f_m(y) = 0 \quad (2.18)$$

La solution de cette équation différentielle peut avoir la forme suivante :

$$f_m(y) = A_m \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + B_m \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + \frac{m\pi y}{a} \left(C_m \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + D_m \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right) \quad (2.19)$$

La solution complémentaire est alors donnée par :



$$w_h = \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + B_m \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + \frac{m\pi y}{a} \left(C_m \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + D_m \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right) \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (2.20)$$

Les constantes A_m , B_m , C_m et D_m sont déterminées à partir des conditions limites aux bords $y=0$ et $y=b$.

La solution particulière w_p est aussi exprimée sous la forme d'une série de Fourier simple :

$$w_p = \sum_{m=1}^{\infty} g_m(y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (2.21)$$

La distribution de la charge $p(x,y)$ est aussi exprimée par :

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} p_m(y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (2.22)$$

Avec :

$$p_m = \frac{2}{a} \int_0^a p(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx \quad (2.23)$$

En substituant les expressions 2.21 et 2.22 dans l'équation de Lagrange, on obtient :

$$\frac{d^4 g_m(y)}{dy^4} - 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \frac{d^2 g_m(y)}{dy^2} + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 g_m(y) = \frac{p_m(y)}{D} \quad (2.24)$$

En résolvant cette équation différentielle, on obtient $g_m(y)$ et on détermine l'expression de la solution particulière w_p .

Les expressions des composantes complémentaires des moments et des efforts résultants sont données par :

$$\begin{aligned} M_{xh} &= D \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} f_m - \nu \frac{d^2 f_m}{dy^2} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}, \\ M_{yh} &= D \sum_{m=1}^{\infty} \left(\nu \frac{m^2 \pi^2}{a^2} f_m - \frac{d^2 f_m}{dy^2} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}, \\ M_{xyh} &= -D(1-\nu) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{a} \frac{df_m}{dy} \cos \frac{m\pi x}{a}, \\ V_{xh} &= D \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^3 f_m - \frac{m\pi}{a} (2-\nu) \frac{d^2 f_m}{dy^2} \right] \cos \frac{m\pi x}{a}, \\ V_{yh} &= D \sum_{m=1}^{\infty} \left[-\frac{d^3 f_m}{dy^3} + (2-\nu) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{df_m}{dy} \right] \sin \frac{m\pi x}{a}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Ces composantes doivent évidemment être complétées par les composantes particulières.

