

Chapitre 3

Plaques circulaires

1. Introduction

En pratique, les éléments de structures supportant des chargements transversaux, tels que les têtes de pistons, les disques de turbines, les radiers de réservoirs, etc. ont généralement une forme circulaire. Donc, de nombreuses applications pratiques nécessitent un développement des relations fondamentales particulières aux plaques circulaires. De plus, le chargement agissant sur une plaque circulaire est souvent symétriquement distribué par rapport à l'axe perpendiculaire à celle-ci et passant par son centre. Dans ce chapitre, l'accent sera mis sur le comportement des plaques circulaires minces à épaisseur constante supportant un chargement symétrique et ayant diverses conditions aux appuis. Le développement des relations de base sera fait en coordonnées polaires.

2. Relations de base en coordonnées polaires :

En général, les coordonnées polaires sont préférables aux coordonnées cartésiennes (utilisées exclusivement dans les développements précédents) quand le problème traité se caractérise par une symétrie axiale en termes de géométrie ou de chargement (Figure 3.1).

Les coordonnées polaires (r, θ) et les coordonnées cartésiennes (x, y) sont liées par les équations suivantes:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \quad ; \quad y = r \sin \theta \\ r^2 &= x^2 + y^2 \quad ; \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Les dérivées par rapport à ces quantités s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \theta \quad ; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin \theta \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\sin \theta}{r} \quad ; \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos \theta}{r} \end{aligned} \tag{3.2}$$

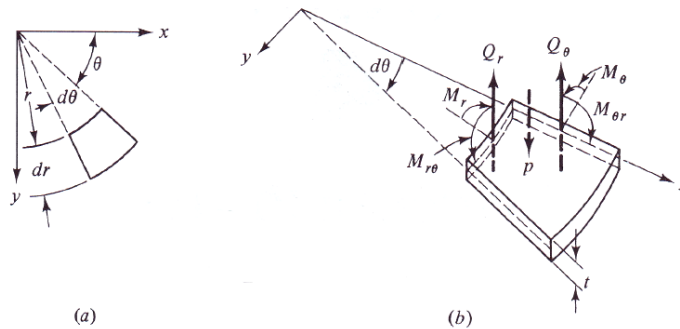


Figure 3.1 – Coordonnées polaires (a) et élément de plaque circulaire (b)



Nous allons exprimer les dérivées partielles de la flèche w ainsi que toutes les relations déjà établies (les relations cinématiques, les contraintes, les efforts intérieurs, l'équation de Lagrange et les conditions aux limites) en coordonnées polaires.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \sin \theta \quad (3.3)$$

Ce qui donne pour la dérivée seconde de w :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \cos^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \frac{\cos \theta \sin \theta}{r} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\sin^2 \theta}{r} + 2 \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\cos \theta \sin \theta}{r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

De la même manière :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \sin^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial r} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\cos^2 \theta}{r} - 2 \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \quad (3.5)$$

Et :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial r} \frac{\cos 2\theta}{r} - \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\cos 2\theta}{r^2} - \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} \quad (3.6)$$

L'opérateur Laplacien s'écrit :

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \quad (3.7)$$

Les dérivées partielles de la flèche w ainsi exprimées en coordonnées polaires, on cherche à établir toutes les relations donnant les déplacements, les déformations, les contraintes, les moments et les forces de cisaillement dans le système de coordonnées polaires.

2.1. Champs des déformations - Relations cinématiques :

Le champ de déplacement s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} w &= w(r, \theta) \\ u &= -z \frac{\partial w}{\partial r} \quad ; \quad v = -\frac{z}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (3.8)$$

avec u étant le déplacement radial et v le déplacement circonférentiel.

Le champ des déformations s'écrit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right) = -\frac{z}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \right) = -\frac{z}{r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$



2.2. Les relations contraintes-déformations :

Les relations contraintes-déformations exprimées en coordonnées polaires s'écrivent :

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu \sigma_\theta] & ; & & \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \nu \sigma_r] & ; & & \gamma_{r\theta} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{G} \\ \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta) & ; & & \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_r) & ; & & \tau_{r\theta} &= G \gamma_{r\theta} \end{aligned} \quad (3.10)$$

2.3. Les expressions des efforts intérieurs et les contraintes :

Considérons la distribution des moments de flexion et des efforts tranchant dans un tronçon infinitésimal d'une plaque circulaire d'épaisseur t (Figure 3.1 (b)). Il faut noter que, pour simplifier les dérivations, l'axe x est pris dans la direction radiale r (i.e., $\theta=0$). Le moment radial, tangentiel et de torsion (M_θ , M_r et $M_{r\theta}$) ainsi que les efforts de cisaillement vertical (Q_r et Q_θ) ont les mêmes valeurs que les moments M_x , M_y , M_{xy} , et les efforts Q_x et Q_y) dans le même point de la plaque. On peut écrire les expressions suivantes pour les trois moments de flexion:

$$\begin{aligned} M_r &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \\ M_\theta &= -D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] \\ M_{r\theta} &= -(1-\nu) D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

Et les efforts de cisaillement s'écrivent :

$$Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 w) \quad ; \quad Q_\theta = -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla^2 w) \quad (3.12)$$

De même, on a les relations suivantes entre les composantes des contraintes et les moments. Il est clair que le maximum des contraintes est atteint pour les surfaces d'ordonnée $z = \pm t/2$.

$$\sigma_r = \frac{12M_r}{t^3} z \quad ; \quad \sigma_\theta = \frac{12M_\theta}{t^3} z \quad ; \quad \tau_{r\theta} = \frac{12M_{r\theta}}{t^3} z \quad (3.13)$$

La force transversale effective (réaction d'appui) par unité de longueur pour un bord $r = a$ et pour une valeur quelconque de θ est donné par :

$$V_r = Q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} = -D \left[\frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 w) + \frac{1-\nu}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \quad (3.14)$$

De la même manière, on peut écrire la force transversale effective par unité de longueur pour un bord $\theta = \theta_0$ et pour une valeur quelconque de r sont donnés par :

$$V_\theta = Q_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} = -D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla^2 w) + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \quad (3.15)$$



2.4. L'équation différentielle de la flèche :

L'équation différentielle de la flèche de la plaque exprimée en coordonnées polaires s'exprime comme suit:

$$\nabla^4 w = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \frac{q(r, \theta)}{D} \quad (3.16)$$

Sous forme expansée, cette équation s'écrit :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^4 w}{\partial r^2 \partial \theta^2} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^2 \partial r} + \frac{4}{r^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} = \frac{q(r, \theta)}{D} \quad (3.17)$$

On considère w_h et w_p comme la solution de l'équation homogène et la solution particulière de l'équation complète, respectivement. La solution de l'équation (3.16) s'écrit alors :

$$w = w_h + w_p \quad (3.18)$$

2.5. Conditions aux limites :

Les conditions aux limites pour une plaque circulaire peuvent s'exprimer de la manière suivante :

✓ *Bord encasté*

Si le bord d'une plaque est encasté, la flèche le long de ce bord est nulle et le plan tangent à la surface moyenne fléchie, le long de ce bord, coïncide avec la position initiale du plan moyen de la plaque. La rotation est donc nulle le long de ce bord.

Si le bord $r = a$ est encasté, les conditions aux limites sont formulées comme suit :

$$w(a, \theta) = 0 \quad ; \quad \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)_{r=a} = 0 \quad (3.19)$$

✓ *Bord simplement appuyé*

Si le bord $r = a$ de la plaque est simplement appuyé, la flèche le long de ce bord est nulle. En plus, il n'existe pas de moment de flexion M_r le long de ce bord. Comme la flèche w est identiquement nulle le long du côté, ses dérivées en y le sont également et l'on a les conditions suivantes :

$$w(a, \theta) = 0 \quad ; \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right)_{r=a} = 0 \quad (3.20)$$

✓ *Bord libre*

Pour un bord libre, le moment de flexion M_r , ainsi que la force transversale effective V_r sont nuls (exprimant l'annulation de la réaction totale).

$$M_r = 0 \quad ; \quad V_r = 0 \quad (r = a) \quad (3.21)$$

3. Flexion axisymétrique des plaques circulaires :

La flexion axisymétrique concerne les cas où le chargement (forces et couples de moments) est à symétrie de révolution autour de l'axe (Oz) de la plaque. Dans ces conditions, la flèche w et par conséquent toutes les inconnues du problème (déplacements, déformations, contraintes, moments et forces) ne dépendent que de la position radiale (r) et sont indépendants de la rotation θ .



Les moments de flexion et les efforts de cisaillement agissant sur une plaque chargée axisymétriquement s'écrivent :

$$M_r = -D \left[\frac{d^2 w}{dr^2} + \nu \frac{dw}{r dr} \right] ; \quad M_\theta = -D \left[\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right]$$

$$Q_r = -D \frac{d}{dr} \left[\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right]$$
(3.22)

L'équation différentielle de la flèche s'écrit dans ces conditions :

$$\nabla^4 w = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = \frac{q(r)}{D}$$
(3.23)

ou sous forme expansée :

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = \frac{q(r)}{D}$$
(3.24)

Cette équation peut s'écrire comme suit :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{q(r)}{D}$$
(3.25)

L'intégration de l'équation de la flèche est obtenue par intégration successive:

$$w = \int \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int r \frac{q(r)}{D} dr dr dr dr$$
(3.26)

La solution générale peut se mettre sous la forme suivante :

$$w = w_h + w_p$$

$$\begin{cases} w_h = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 \\ w_p = \int_0^r \frac{1}{r} \int_0^r \int_0^r \int_0^r r \frac{q(r)}{D} dr dr dr dr \end{cases}$$
(3.27)

Les constantes d'intégration C_i doivent être déterminées par les conditions aux limites de la plaque circulaire. Au centre de la plaque ($r=0$), la flèche w et le moment M_r sont finis. Par conséquent, les constantes C_1 et C_2 doivent être nulles. Il ne reste donc qu'à déterminer les constantes C_3 et C_4 par les conditions établies au paragraphe 2.5.

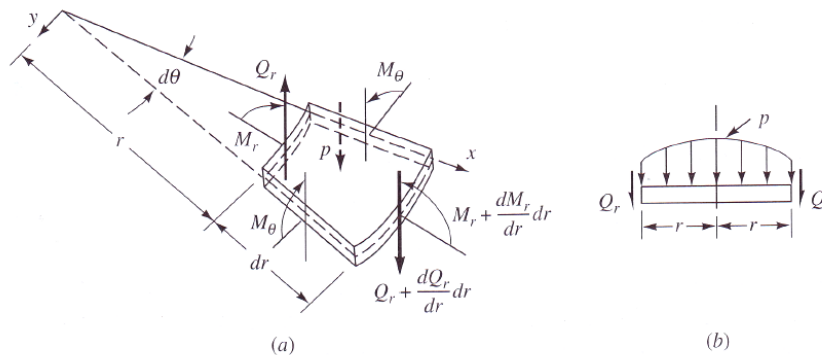


Figure 3.2 – Flexion axisymétrique d'une plaque circulaire



4. Méthodes énergétiques :

4.1. Energie de déformation élastique d'une plaque :

L'énergie de déformation emmagasinée par un solide élastique soumis à un état général de contrainte est exprimée par :

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dx dy dz \quad (3.28)$$

L'intégration s'étend sur le volume entier du solide en question. Suivant les hypothèses énoncées pour le cas particulier des plaques minces, les composantes σ_z , γ_{xz} et γ_{yz} peuvent être omises. Il est aisé de démontrer en utilisant la loi de Hooke que l'expression de l'énergie en fonction des seules contraintes s'écrit comme suit :

$$U = \int_V \left[\frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu\sigma_x\sigma_y) + \frac{1}{2G} \tau_{xy}^2 \right] dx dy dz \quad (3.29)$$

Pour les plaques minces d'épaisseur constante h et après une intégration suivant l'épaisseur de la plaque, l'énergie de déformation peut s'écrire en fonction de la flèche w comme suit :

$$U = \frac{1}{2} \int_S D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (3.30)$$

Ou encore :

$$U = \frac{1}{2} \int_S D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right] dx dy \quad (3.31)$$

Toutes les expressions développées ci-dessus sont très utiles dans la formulation de différentes techniques énergétiques et dans différentes techniques numériques basées sur la théorie des éléments finis.

4.2. Principe des Travaux Virtuels :

Considérons un corps élastique auquel on impose un déplacement incrémental arbitraire appelé déplacement virtuel : δu , δv et δw dans les directions x , y et z .

Le solide évolue de son état initial vers un état d'équilibre sous l'action des charges surfaciques p (exprimées par unité de surface) dont le travail le travail est donné par :

$$\delta W = \int_S (p_x \delta u + p_y \delta v + p_z \delta w) dS \quad (3.32)$$

Ou p_x , p_y et p_z sont les composantes des charges surfaciques dans les directions x , y et z . S étant la surface de bord du solide.

L'énergie de déformation résultant de la déformation virtuelle est donnée par :

$$\delta U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) dV \quad (3.33)$$



Le Principe des Travaux Virtuels (PTV) stipule que le travail total effectué durant le déplacement virtuel est nul :

$$\delta W - \delta U = 0 \quad (3.34)$$

4.3. Principe de minimisation de l'énergie potentielle :

L'énergie potentielle totale d'un solide élastique est définie comme :

$$\Pi = U - W \quad (3.35)$$

D'après le principe de minimisation de l'énergie potentielle, un état d'équilibre stable correspond à une énergie potentielle minimum. Autrement dit, pour tout déplacement satisfaisant aux conditions aux limites et aux conditions d'équilibre, l'énergie potentielle prend une valeur minimale.

Pour une plaque mince d'épaisseur constante soumise à une charge transversale, l'énergie potentielle est donnée par :

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta\gamma_{xy}) dx dy dz - \iint_S q(x, y) \cdot w(x, y) dx dy \quad (3.36)$$

En considérant l'expression de l'énergie de déformation élastique en fonction de la flèche w , on peut réécrire l'expression de l'énergie potentielle comme suit :

$$\Pi = \iint_S \left\{ \frac{D}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right] - q(x, y) w(x, y) \right\} dx dy \quad (3.37)$$

4.4. Méthode de Ritz :

La méthode de Ritz est une méthode pratique pour la détermination des solutions des problèmes de flexion des plaques minces en se basant sur le principe de minimisation de l'énergie potentielle. Les étapes essentielles de cette méthode peuvent se résumer comme suit :

- ✓ Choix de la solution de la flèche sous la forme de séries contenant des paramètres inconnues a_{mn} ($m, n = 1, 2, \dots$). La flèche ainsi choisie doit satisfaire aux conditions aux limites géométriques. Un choix astucieux de l'expression de la flèche est très important pour assurer une bonne précision de la solution finale. Il est souhaitable de choisir une expression de w qui décrit approximativement la vraie surface fléchie de la plaque.
- ✓ En utilisant la solution choisie, on détermine l'expression de l'énergie potentielle en fonction des coefficients a_{mn} .
- ✓ Comme les coefficients a_{mn} gouvernent la variation de l'énergie potentielle, pour garantir que l'énergie potentielle soit minimale à l'équilibre il faut assurer que :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_{11}} = 0, \dots, \frac{\partial \Pi}{\partial a_{mn}} = 0 \quad (3.38)$$

L'équation 3.38 conduit à un système d'équation algébrique dont la résolution conduit à la détermination des coefficients a_{mn} .

- ✓ Substitution des coefficients a_{mn} dans l'expression de la flèche w choisie d'où la solution du problème.

