



Ecole Polytechnique de Tunisie

Cours MEST 119

Plaques et Coques

N. Bel Hadj Ali

Maître de Conférences en Génie Civil
Département de Génie Civil, ENIG
Laboratoire de Systèmes et de Mécanique Appliquée (LASMAP), EPT

nizar.belhadjali@gmail.com

Cours Plaques et Coques – Bel Hadj Ali N.

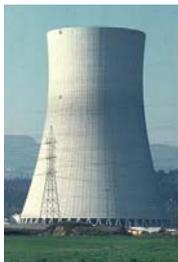
1

Théorie des coques minces

Définition des coques

- Structure d'épaisseur faible à modérée par rapport aux dimensions globales.
- Surface de référence non plane.

Une coque est définie par la géométrie courbe de sa surface moyenne et par son épaisseur en tout point de cette surface. En outre, pour l'ingénieur, il convient de caractériser le matériaux constituant la coque, les conditions d'appui et les charges.



Cours Plaques et Coques – Bel Hadj Ali N.

2

Théorie des coques minces

Coques en génie civil :

Rolex Learning Center (EPFL, Lausanne, Suisse)



Cours Plaque et Coques - Ed. Fraïssé, M. N.

3

Théorie des coques minces

Coques en génie civil :

Rolex Learning Center (EPFL, Lausanne, Suisse)



Cours Plaque et Coques - Ed. Fraïssé, M. N.

4

Théorie des coques minces

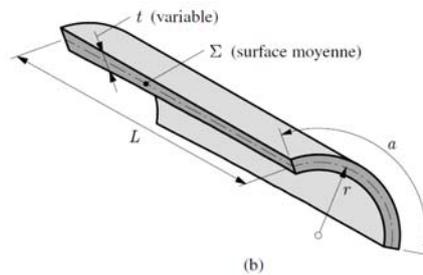
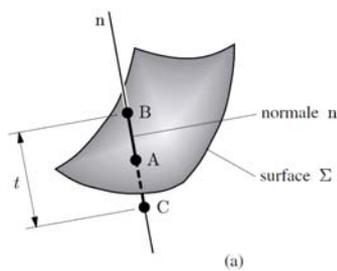
Quelques définitions

Surface moyenne Σ

Normale \mathbf{n}

Épaisseur t mesurée selon la normale, $t \ll L$ et $t \ll a$

La rigidité de ces structures peut être accrue par l'adjonction de raidisseurs. On parle alors de coques *nervurées* ou *raidies*.



Cours Plaque et Coque – Bel Hadj Ali N.

5

Théorie des coques minces – Introduction

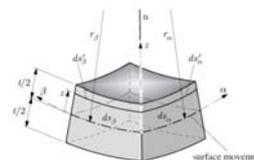
Pour éviter de recourir à une analyse de solide tridimensionnel, l'objectif de toute théorie de coque est de tirer parti de la minceur de l'élément structural défini ci-dessous : sa réponse peut en effet être ramenée à l'étude bidimensionnelle de sa surface moyenne, complétée de règles dictant le comportement des normales.

Love (1888) – « première approximation cohérente » en théorie de coques

Koiter (1960) – validation des hypothèses de Love

Notion d'élément de coque

- système de coordonnées: lignes de courbure + normale
- épaisseur constante
- découpe par deux paires de sections droites infiniment voisines, contenues dans les sections normales associées aux lignes de courbure



Cours Plaque et Coque – Bel Hadj Ali N.

6

Théorie des coques minces – Introduction

Love (1888) – «première approximation cohérente» en théorie de coques

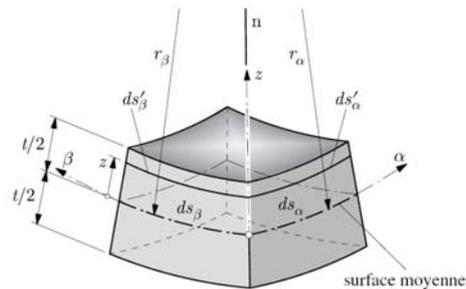
Koiter (1960) – validation des hypothèses de Love

Notion d'élément de coque

- o au niveau de la surface moyenne, arcs de longueur respectives : dS_α et dS_β
- o à un niveau $z \neq 0$, arcs de longueur :

$$dS'_\alpha = \left(1 - \frac{z}{r_\alpha}\right) dS_\alpha$$

$$dS'_\beta = \left(1 - \frac{z}{r_\beta}\right) dS_\beta$$



Cours Plaques et Coques – Ed. Friedl, M. N.

7

Théorie des coques minces – Hypothèses

1. Hypothèses de linéarisation

- Linéarisation géométrique: petits déplacements
- Linéarisation matérielle : Loi de Hooke + matériau homogène isotrope

2. Hypothèses de structure mince

Love a généralisé aux coques les hypothèses classiques propres aux poutres de Bernouilli et aux plaques de Kirchhoff.

- Les normales à la surface moyenne de la coque non déformée restent des normales à la surface moyenne de la coque déformée et elles ne changent pas de longueur;

$$\gamma_{\alpha z} = 0 \quad ; \quad \gamma_{\beta z} = 0$$

$$\varepsilon_z = 0$$

Il en résulte que la contrainte normale transversale est négligeable:

$$\sigma_z \cong 0$$

Cours Plaques et Coques – Ed. Friedl, M. N.

8

Théorie des coques minces – Hypothèses

3. Hypothèse de faible épaisseur

L'épaisseur t de la coque est petite vis-à-vis du rayon de courbure minimal r_{\min} de la surface moyenne, soit

$$\frac{t}{r_{\min}} \ll 0$$

Cette hypothèse est essentielle dans la théorie de Love, car elle conduit à une simplification formidable des équations. Il en résulte que :

$$\frac{z}{r_{\alpha}} \ll 1 \quad ; \quad \frac{z}{r_{\beta}} \ll 1$$

D'où:
$$dS'_{\alpha} \cong dS_{\alpha} \quad ; \quad dS'_{\beta} \cong dS_{\beta}$$

Ce qui signifie que les faces de la coque peuvent être admises rectangulaires.

En pratique, la théorie reste valable si : $\frac{t}{r_{\min}} < \frac{1}{10}$

Théorie des coques minces – Hypothèses

4. Quelques remarques

R1 - La théorie de Love, construite sur les hypothèses précédentes, implique donc des erreurs d'ordre $O(t/r_{\min})$. Toute simplification portant sur des termes dont l'ordre de grandeur est inférieur ou égal à $O(t/r_{\min})$ est donc justifiée, alors qu'il serait vain de penser améliorer la théorie en tenant compte de tels termes, leur influence étant d'emblée masquée par les erreurs inhérentes aux hypothèses de base.

R2 - Diverses théories ont été proposées, afin d'éviter les incorrections de la théorie simplifiée de Love. Certaines sont des améliorations, restant au niveau d'une *première approximation cohérente*. D'autres sont des théories plus précises, dites d'*ordre supérieur*, abandonnant tout ou partie des hypothèses précédentes. Ces théories ne présentent que peu d'intérêt pratique.

R3 - Plus utiles sont les théories abandonnant l'hypothèse de conservation des normales. Elles s'adressent aux coques dites d'*épaisseur modérée*, dans lesquelles on souhaite tenir compte de la déformation par effort tranchant. Ces théories peuvent être développées en suivant les mêmes lignes que celles utilisées ici pour établir la théorie de Love.

Coques de révolution – Théorie membranaire

Coques de révolution

Surfaces de révolution: sphère, calotte sphérique, cône, tronc de cône, cylindre, parabolôide, hyperboloïde...

Utilisations

Construction: réservoirs, châteaux d'eau, silos, cheminées, tours de télécommunication, enceintes de réacteurs, tunnels, conduites forcées, tours de refroidissement...

Autres applications: citernes, chaudières, tuyauteries, fusées, sous-marins...

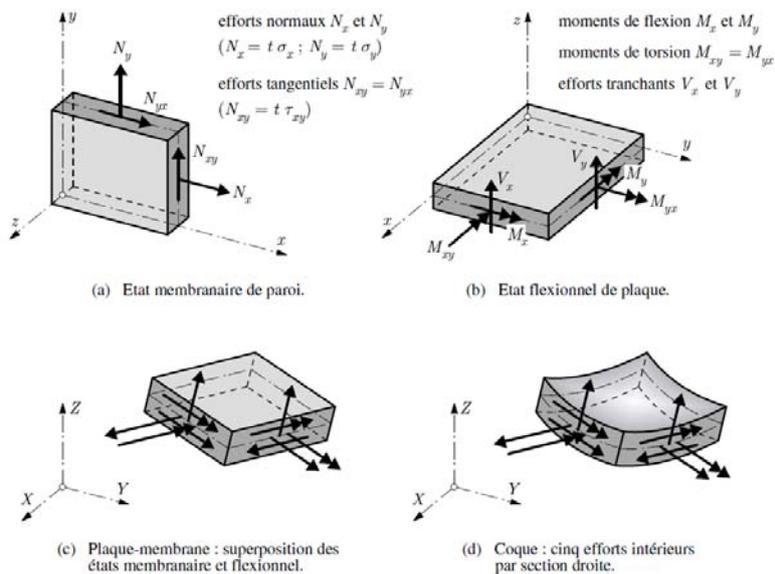


La théorie membranaire est relativement simple d'utilisation et fournit des résultats acceptables

Cours Plaque et Coque – Bel Hadj Ali N.

11

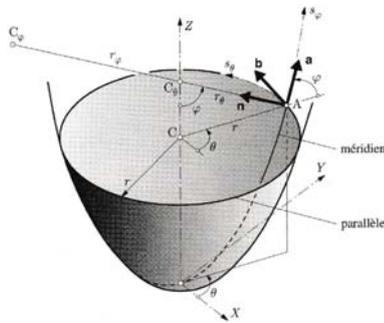
Coques de révolution – Théorie membranaire



Cours Plaque et Coque – Bel Hadj Ali N.

12

Coques de révolution – Géométrie



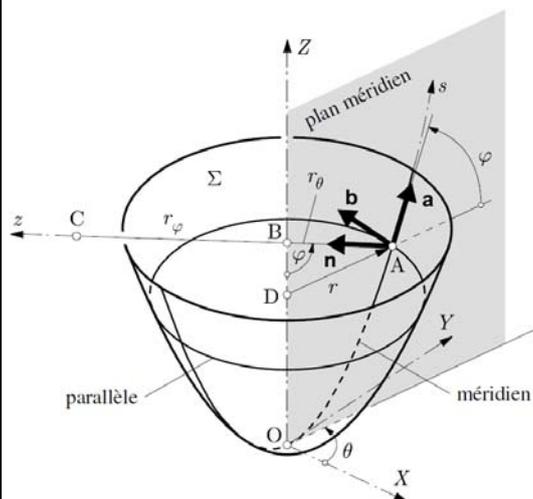
- Surface obtenue par rotation d'une courbe plane (= méridien) autour d'un axe situé dans le plan méridien.
- Chaque point décrit un cercle (= parallèle)
- Système de coordonnées: θ et φ
- (X, Y, Z) : axes cartésiens
- OZ : axe de révolution
- $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{n})$: repère de Σ en A , déduit de (x, y, z) par deux rotations successives θ et φ

- z : axe normal en A (selon \mathbf{n}), porte les rayons de courbures principaux r_θ et r_φ
- r : rayon du parallèle en A
- s : coordonnée curviligne sur le méridien

Cours Plaque et Coques – Ed. Firdj Ali N.

13

Coques de révolution – Géométrie



(X, Y, Z) : axes cartésiens

Z : axe de révolution

(φ, θ) : coordonnées d'un point A

$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{n})$: repère de Σ en A

z : axe normal en A , selon \mathbf{n} , portant les rayons de courbure principaux $r_\varphi (= CA)$ et $r_\theta (= BA)$

r : $(= DA)$ rayon du parallèle en A

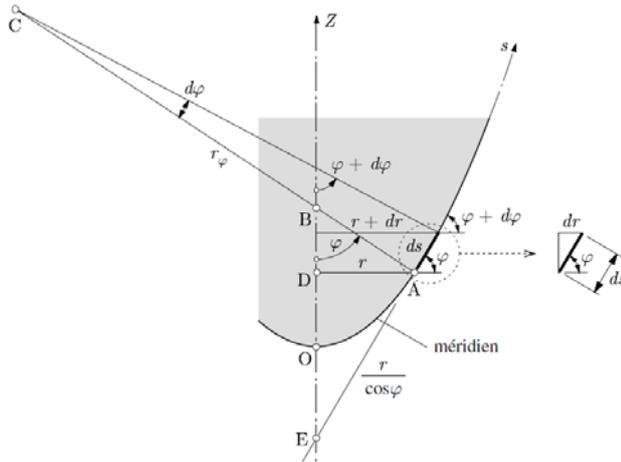
s : $(= \text{arc } OA)$ coordonnée curviligne sur le méridien

Cours Plaque et Coques – Ed. Firdj Ali N.

14

Coques de révolution – Géométrie

Relations utiles (dans le plan méridien)



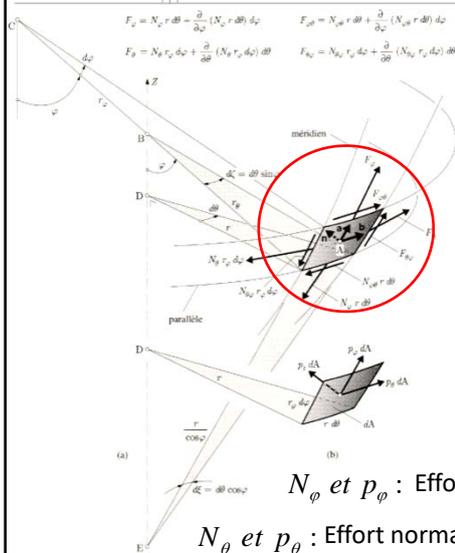
$$r = r_\theta \sin \varphi$$

$$ds = r_\varphi d\varphi$$

$$dr = ds \cos \varphi$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = r_\varphi \cos \varphi$$

Equation d'équilibre



Equation d'équilibre

$$F_\varphi = N_\varphi r d\theta + \frac{\partial}{\partial \varphi} (N_\varphi r d\theta) d\varphi$$

$$F_\theta = N_\theta r_\varphi d\varphi + \frac{\partial}{\partial \theta} (N_\theta r_\varphi d\varphi) d\theta$$

$$F_z = N_{\varphi\theta} r d\theta + \frac{\partial}{\partial \varphi} (N_{\varphi\theta} r d\theta) d\varphi$$

$$F_{\theta\varphi} = N_{\theta\varphi} r_\varphi d\varphi + \frac{\partial}{\partial \theta} (N_{\theta\varphi} r_\varphi d\varphi) d\theta$$

L'équilibre des résultantes des efforts agissant sur chacun des bords de l'élément de coque selon les trois directions (φ, θ, z) fournit trois équations reliant les trois efforts membranaires inconnus.

$$\sum F_\varphi = 0 \quad ; \quad \sum F_\theta = 0 \quad ; \quad \sum F_z = 0$$

Cours Plaque et Coque - Bel Hadj Ali N.

17

Equation d'équilibre

$$F_\varphi = N_\varphi r d\theta + \frac{\partial}{\partial \varphi} (N_\varphi r d\theta) d\varphi$$

$$F_\theta = N_\theta r_\varphi d\varphi + \frac{\partial}{\partial \theta} (N_\theta r_\varphi d\varphi) d\theta$$

$$F_{\varphi\theta} = N_{\varphi\theta} r d\theta + \frac{\partial}{\partial \varphi} (N_{\varphi\theta} r d\theta) d\varphi$$

$$F_{\theta\varphi} = N_{\theta\varphi} r_\varphi d\varphi + \frac{\partial}{\partial \theta} (N_{\theta\varphi} r_\varphi d\varphi) d\theta$$

Cours Plaque et Coque - Bel Hadj Ali N.

Equation d'équilibre

$$\sum F_\varphi = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (N_\varphi r) d\theta d\varphi + \frac{\partial}{\partial \theta} (N_{\theta\varphi}) r_\varphi d\varphi d\theta - N_\theta r_\varphi d\varphi d\theta \cos \varphi + p_\varphi r_\varphi r d\varphi d\theta = 0$$

$$\sum F_\theta = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (N_\theta) r_\varphi d\varphi d\theta + \frac{\partial}{\partial \varphi} (N_{\theta\varphi} r) d\theta d\varphi + N_{\theta\varphi} r_\varphi d\varphi d\theta \cos \varphi + p_\theta r_\varphi r d\varphi d\theta = 0$$

A cause de la double courbure de l'élément, les efforts normaux méridien N_φ et circonférentiel N_θ ont des composantes sur l'axe z qui permettent d'équilibrer la charge p_z . La troisième équation d'équilibre prend la forme suivante

$$\sum F_z = 0$$

$$N_\varphi r d\theta d\varphi + N_\theta r_\varphi d\varphi d\theta \sin \varphi + p_z r_\varphi r d\varphi d\theta = 0$$

Equation d'équilibre

Après simplification des équations précédentes, avec $N_{\varphi\theta} = N_{\theta\varphi}$ et $r = r_\theta \sin \varphi$,

On obtient les équations d'équilibre suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (r N_\varphi) + r_\varphi \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \theta} - r_\varphi N_\theta \cos \varphi + p_\varphi r_\varphi r = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (r N_{\theta\varphi}) + r_\varphi \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + r_\varphi N_{\theta\varphi} \cos \varphi + p_\theta r_\varphi r = 0$$

$$\frac{N_\varphi}{r_\varphi} + \frac{N_\theta}{r_\theta} + p_z = 0$$

Chargement de révolution

Lorsque la charge a également la symétrie de révolution, les efforts intérieurs sont constants le long d'un parallèle, et toutes les dérivées circonférentielles s'annulent. Dans les équations précédentes, il reste :

$$\frac{d}{d\varphi}(r N_\varphi) - r_\varphi N_\theta \cos \varphi + p_\varphi r_\varphi r = 0$$

$$\frac{d}{d\varphi}(r N_{\theta\varphi}) + r_\varphi N_{\theta\varphi} \cos \varphi + p_\theta r_\varphi r = 0$$

$$\frac{N_\varphi}{r_\varphi} + \frac{N_\theta}{r_\theta} + p_z = 0$$

On observe que la seconde équation est découplée des deux autres. On peut donc traiter séparément les deux cas suivants :

- l'effort tangentiel $N_{\theta\varphi}$ dû à la composante p_θ ;
- les efforts normaux N_φ et N_θ dus aux composantes p_φ et p_z .

Chargement de révolution

Effort tangentiel

$$dr/d\varphi = r_\varphi \cos \varphi$$

La seconde équation s'écrit alors : $\frac{d}{d\varphi}(r^2 N_{\theta\varphi}) = -p_\theta r^2 r_\varphi$

Et, après intégration, on obtient :

$$N_{\theta\varphi} = -\frac{1}{r^2} \left[\int_\varphi p_\theta r^2 r_\varphi d\varphi + C \right]$$

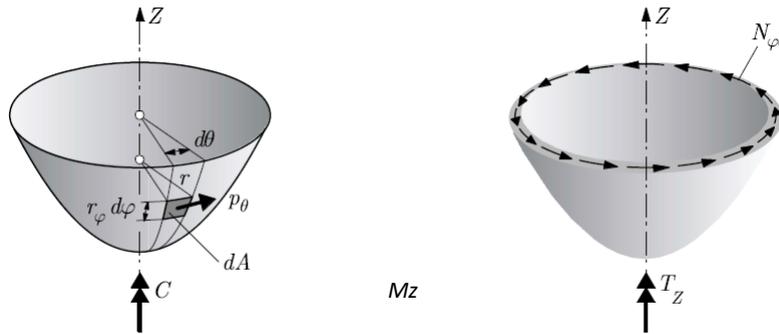
La quantité entre crochets représente le moment résultant, agissant sur l'axe de révolution Z, des charges p_θ et d'un éventuel moment concentré C, et ce pour une unité d'angle θ . Appelons $M_z/2\pi$ cette résultante, on obtient :

$$N_{\theta\varphi} = N_{\varphi\theta} = -\frac{M_z}{2\pi r^2}$$

Chargement de révolution

Effort tangentiel

$$N_{\theta\varphi} = N_{\varphi\theta} = -\frac{M_z}{2\pi r^2}$$



Le cas de charge p_θ est rare en pratique.

Chargement de révolution

Efforts normaux

Tirant N_θ de la troisième équation et l'introduisant dans la première, on peut mettre l'équation différentielle obtenue sous la forme suivante :

$$\frac{d}{d\varphi}(r N_\varphi \sin \varphi) = -(p_\varphi \sin \varphi + p_z \cos \varphi) r r_\varphi$$

Et, après intégration, on obtient :

$$N_\varphi = -\frac{1}{r \sin \varphi} \left[\int_\varphi (p_\varphi \sin \varphi + p_z \cos \varphi) r r_\varphi d\varphi + Q \right]$$

La quantité entre crochets représente la force résultante, sur l'axe Z, des composantes p_φ et p_z des charges appliquées d'une part, et d'une éventuelle force concentrée Q d'autre part, et ce pour une unité d'angle θ . Appelons $F_z/2\pi$ cette résultante, on obtient :

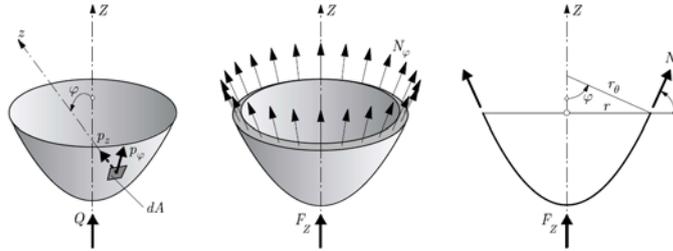
$$N_\varphi = -\frac{F_z}{2\pi r \sin \varphi}$$

Chargement de révolution

Efforts normaux

$$N_{\varphi} = -\frac{F_z}{2\pi r \sin \varphi}$$

Cette équation représente l'équilibre axial de la coque coupée au niveau du parallèle φ quelconque.



Lorsque N_{φ} est connu, l'effort normal N_{θ} se calcule à l'aide de la troisième équation d'équilibre :

$$N_{\theta} = -r_{\theta} \left(\frac{N_{\varphi}}{r_{\varphi}} + p_z \right)$$



Thank you for your attention