ENIG
Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabes
Département de Génie Civil

Mécanique des Structures — *Section : GCV2*
BEL HADJ ALI N. — *Date : 04 janvier 2019*

Devoir de Synthèse

Durée : 2h00 – Les documents de cours ne sont pas autorisés

EXERCICE 1 : (10 POINTS)

On considère le portique de la Figure 1.

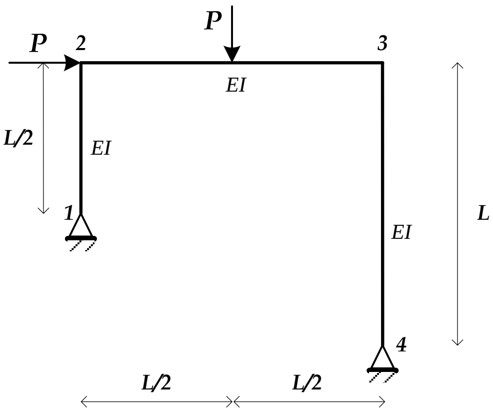
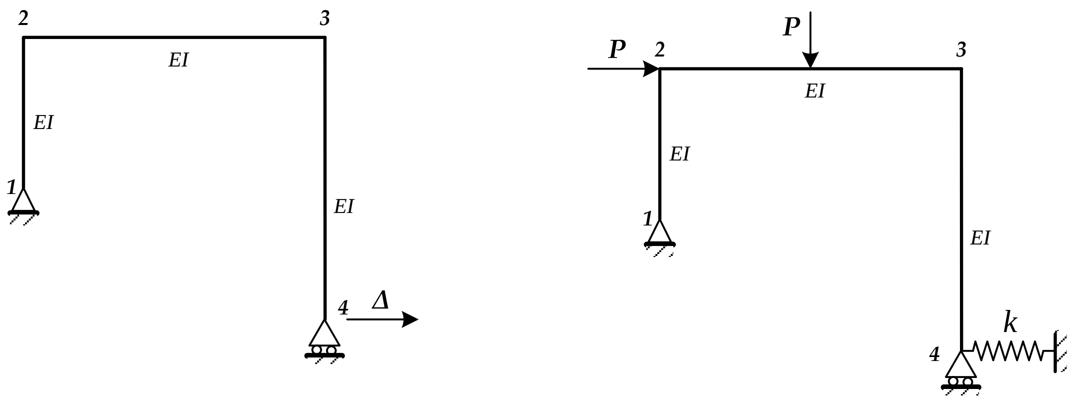


Figure 1.

1. Analyser la structure par la méthode des forces et tracer les diagrammes du moment de flexion et de l'effort tranchant (4pts) ;
2. Dans la configuration A (Figure 2), la structure est soumise à un déplacement horizontal imposé au niveau de l'appui 4. Retracer le diagramme du moment de flexion pour cette configuration (P=0 dans ce cas) (3pts).
3. Dans la configuration B (Figure 2), la structure est liée à un appui élastique modélisé par un ressort linéaire de constante de rigidité k. Déterminer alors l'expression de la réaction horizontale au nœud 4 en fonction de k (3pts).



Configuration A   Configuration B

Figure 2.

EXERCICE 2 : (10 POINTS)

On considère le portique de la Figure 3. On demande d'analyser cette structure par la méthode des rotations. Les déformations dues à N et T seront négligées. On va aussi considérer que P=qL.

1. Identifier les ddl (inconnues) de la structure (1pt) ;
2. Ecrire le système à résoudre (4pts) ;
3. Déterminer les inconnues (ddl) (2pts) ;
4. Déterminer les moments aux extrémités des barres et tracer les diagrammes de M et T (3pts).

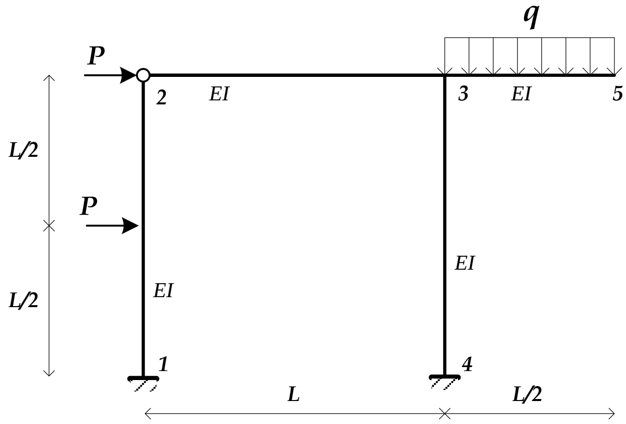
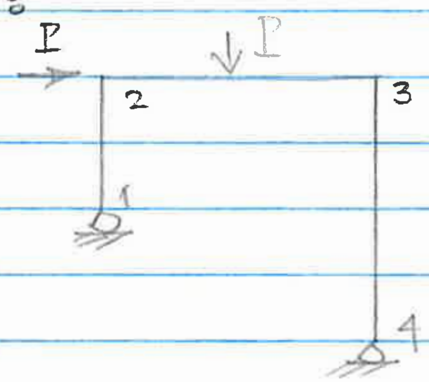


Figure 3.

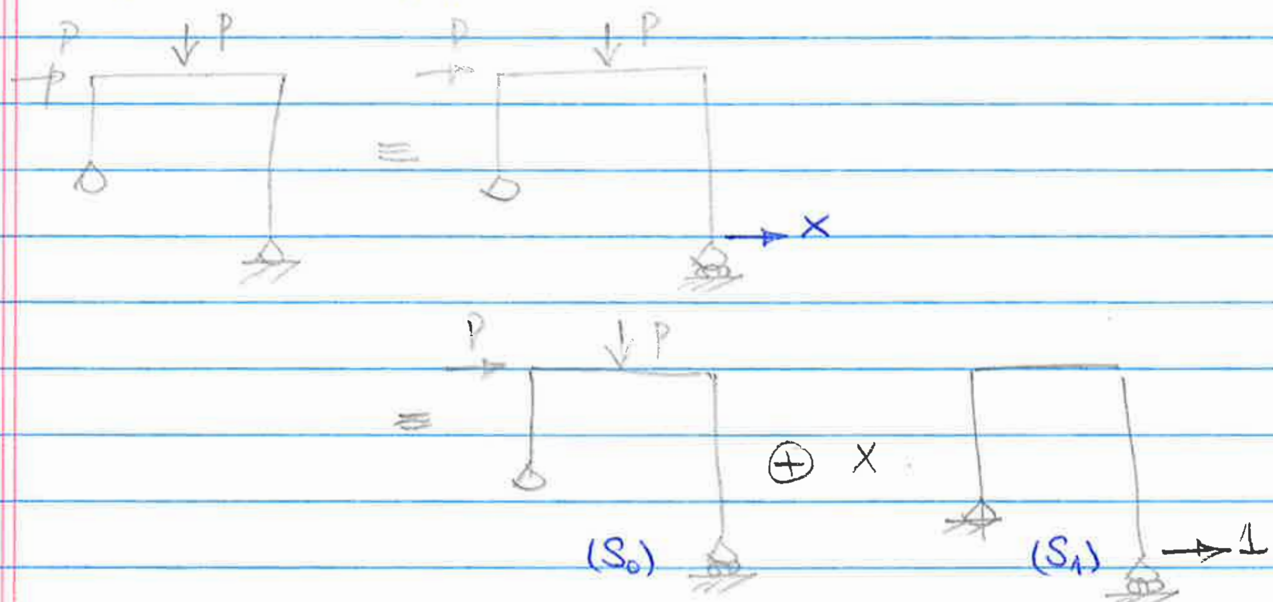
Exercice N°1:



1- Analyse de la structure par la méthode des forces.

La structure est hyperstatique de degré 1

On va faire une coupure simple en remplaçant l'appui simple au noeud 4 par un appui chariot.



La condition de compatibilité cinématique doit exprimer le fait que le déplacement horizontal au noeud 4 est nul.
Cela s'écrit comme :

$$a_{10} + X \cdot a_{11} = 0$$

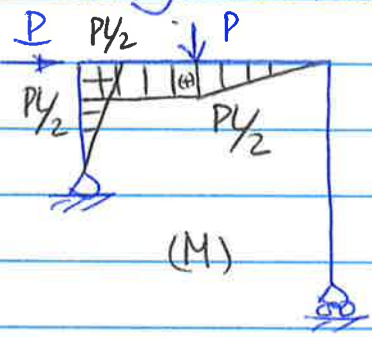
a_{10} : dép. horizontal en 4 dans la structure (S_0)

a_{11} : " " " " (S_1)

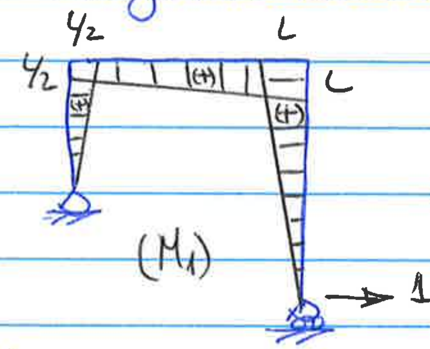
les expressions de a_{10} et et a_{11} seront déterminées en utilisant le PTV

* Détermination de a_{10} :

Chargement réel



Chargement virtuel



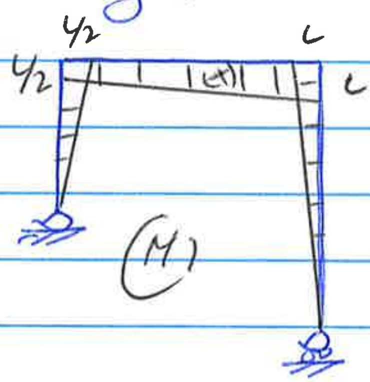
PTV : $$1 \cdot a_{10} = \int_{\text{Structure}} \frac{M M_1}{EI} dx$$

Tableau des intégrales :

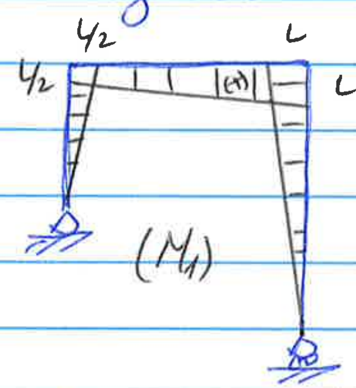
$$a_{10} = \frac{29}{96} \frac{PL^3}{EI}$$

* Détermination de a_{11} :

Chargement réel



Chargement virtuel



PTV : $$1 \cdot a_{11} = \int_{St} \frac{M M_1}{EI} dx = \int_{St} \frac{M_1^2}{EI} dx$$

Tableau des intégrales :

$$a_{11} = \frac{23}{24} L^3/EI$$

Détermination de la réaction d'appui inconnu :

$$a_{10} + X \cdot a_{11} = 0 \implies X = -a_{10}/a_{11}$$

$$\implies X = -\frac{29}{92} P$$

Le diagramme du moment de flexion s'obtient par superposition

$$M_{(S)} = M_{(S_0)} + X \cdot M_{(S_1)}$$

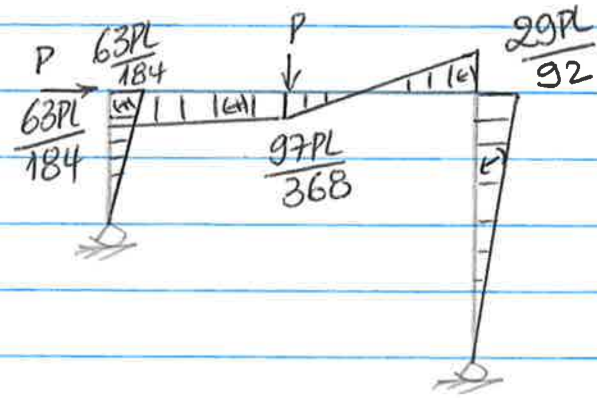
Et donc

$$M_2 = PL/2 - 29/92\,P \cdot L/2 = \frac{63\,PL}{184}$$

$$M_p = PL/2 - \frac{29}{92}P \cdot 3L/4 = \frac{97}{368}PL$$

$$M_3 = 0 - \frac{29}{92}P \cdot L = -\frac{29\,PL}{92}$$

On obtient alors le diagramme suivant :



2° Déplacement imposé :

En absence des charges et avec un déplacement imposé au noeud 4, la condition de compatibilité cinématique s'écrit :

$$X \cdot a_{11} = \Delta \quad \Rightarrow \quad X = \frac{24\,\Delta EI}{23\,L^3}$$

posons $\Delta' = \frac{\Delta EI}{L^3}$ donc la réaction d'appui horizontale s'écrit :

$$X = 24\Delta'/23$$

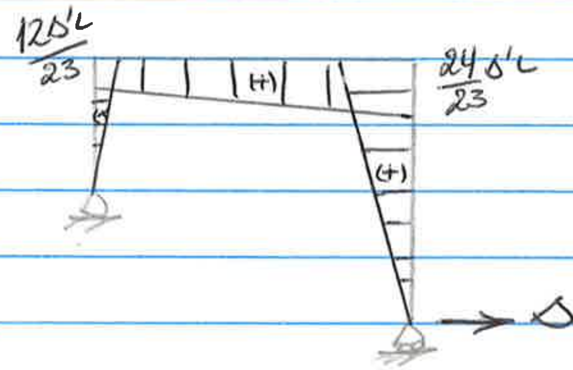
les moments de flexion s'écrivent alors :

$$M_2 = \frac{24\Delta'}{23} \cdot L/2 = \frac{12\Delta' L}{23}$$

$$M_P = \frac{24\Delta'}{23} \cdot \frac{3L}{4} = \frac{18\Delta' L}{23}$$

$$M_3 = \frac{24\Delta'}{23} \cdot L = \frac{24\Delta' L}{23}$$

Ce qui donne le diagramme des moments suivant :



$$\Delta' = \frac{\Delta EI}{L^3}$$

3° Ajout d'un appui élastique :

L'ajout de l'appui élastique ne change pas la condition de compatibilité cinématique

$$a_{10} + X \cdot a_{11} = 0$$

Mais on doit considérer la contribution de l'énergie élastique du ressort :

$$a_{10} = \int_{St} \frac{MM_1}{EI} dx + F_1 \cdot F/k = \frac{29}{96} \frac{PL^3}{EI}$$

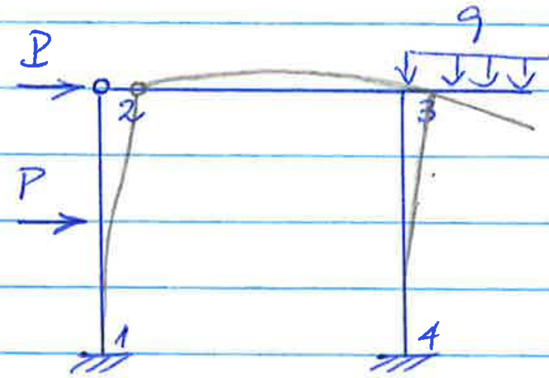
$$a_{10} = \int_{St} \frac{MM_1}{EI} dx + F_1 \cdot F/k = \frac{23}{24} L^3/EI + 1/k$$

La réaction d'appui horizontale est donc :

$$X = R_{4x} = \frac{-29/96 \; PL^3/EI}{23/24 \; L^3/EI + 1/k}$$

Exercice N°2 :

1°- Identification des inconnus



$\theta_1 = 0 \; ; \; \theta_4 = 0$

$\varphi_{23} = 0$

$$\varphi_{12} = \varphi_{34} \quad ; \quad \theta_3$$

La console n'est pas considérée mais remplacée par son effet ; les rotations au noeud 2 non considérée

Donc ;

le problème admet 2 inconnus : θ_3 et φ_{12}

2°- Expressions des moments :

• Poutre 1-2 : rigide-articulée avec charge concentrée

$$m_{12} = PL/8 \quad ; \quad m_{21} = -PL/8$$

$$\begin{cases} M_{12} = -\dfrac{3EI}{L}\varphi_{12} + PL/8 + PL/16 = -\dfrac{3EI}{L}\varphi_{12} + \dfrac{3PL}{16} \\ M_{21} = 0 \end{cases}$$

• Poutre 2-3 : articulée-rigide sans chargement

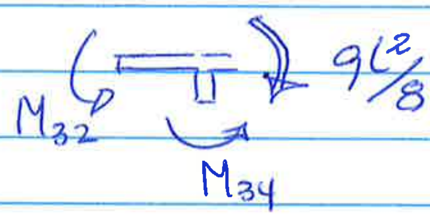
$$\begin{cases} M_{23} = 0 \\ M_{32} = \dfrac{3EI}{L}\theta_3 \end{cases}$$

. Poutre 3-4 : rigide-rigide sans chargement.

$$\begin{cases} M_{34} = \frac{2EI}{L}(2\theta_3 - 3\psi_{34}) = \frac{4EI}{L}\theta_3 - \frac{6EI}{L}\psi_{12} \\ M_{43} = \frac{2EI}{L}(\theta_3 - 3\psi_{34}) = \frac{2EI}{L}\theta_3 - \frac{6EI}{L}\psi_{12} \end{cases}$$

Les équations d'équilibre :

- Equilibre du noeud 3 :

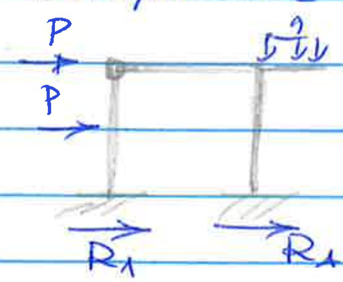


$$\Sigma M_{int} = \Sigma M_{ext}$$

On obtient : $M_{32} + M_{34} = -ql^2/8 = -PL/8 \quad (P = qL)$

Ce qui donne : $7\theta_3 - 6\psi_{12} = -\frac{PL^2}{8EI}$ (1)

- Equilibre des forces horizontales :

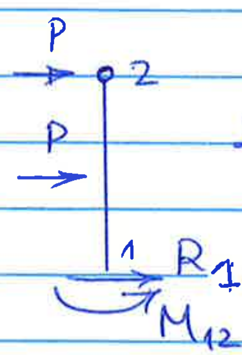


$\Sigma F_x = 0$

$2P + R_1 + R_4 = 0.$

Cherchons les expressions de R_1 et R_4 en fct des inconnus :

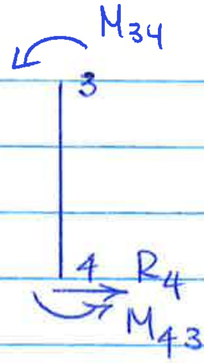
Poutre 1-2 :



$\Sigma M/_2 = 0 \quad PL/2 + R_1 \cdot L + M_{12} = 0$

$\Rightarrow R_1 = -\frac{M_{12}}{L} - P/2$

Poutre 3-4 :



$\Sigma M/_3 = 0$

$$\Rightarrow R_4 = -\frac{M_{34}+M_{43}}{L}$$

L'équation d'équilibre s'écrit donc :

$$2P - \frac{M_{12}}{L} - P/2 - 1/L\,(M_{34}+M_{43}) = 0$$

$$-M_{12} - M_{34} - M_{43} = -\frac{3PL}{2}$$

Ce qui donne :

$$-6\theta_3 + 15\,\varphi_{12} = \frac{-21}{16}\,PL^2/EI \qquad (2)$$

Le système à résoudre est donc le suivant :

$$\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -6 & 15 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_3 \\ \varphi_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{PL^2}{8EI} \\ -\frac{21\,PL^2}{16EI} \end{Bmatrix}$$

3° Détermination des inconnus :

On va résoudre le système obtenu à la question précédente ce qui donne :

$$\begin{Bmatrix} \theta_3 \\ \varphi_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{69} \begin{bmatrix} 15 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -PL^2/8EI \\ -\frac{21\,PL^2}{16EI} \end{Bmatrix}$$

On obtient :

$$\theta_3 = \frac{-13}{92}\,\frac{PL^2}{EI} \;;\; \varphi_{12} = \varphi_{34} = \frac{-53}{368}\,\frac{PL^2}{EI}$$

4° Détermination des moments et traçage des diagrammes

$$M_{12} = -\frac{3EI}{L}\psi_{12} + \frac{3PL}{16} \longrightarrow M_{12} = \frac{57\,PL}{92}$$

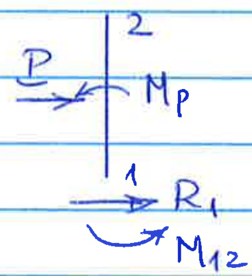
$$M_{32} = \frac{3EI}{L}\theta_3 \longrightarrow M_{32} = -\frac{39}{92}PL$$

$$M_{34} = \frac{4EI}{L}\theta_3 - \frac{6EI}{L}\psi_{12} \longrightarrow M_{34} = \frac{55\,PL}{184}$$

$$M_{43} = \frac{2EI}{L}\theta_3 - \frac{6EI}{L}\psi_{12} \longrightarrow M_{43} = \frac{107\,PL}{184}$$

Moment sous la charge P : M_P :

Poutre 1-2 :



$$\Sigma M_{/P} = 0 \Rightarrow M_P + R_1 \cdot L/2 + M_{12} = 0$$

$$\Rightarrow M_P = -M_{12} - R_1 \cdot L/2$$

Remplaçons R_1 par son expression : $R_1 = -\frac{M_{12}}{L} - P/2$

$$\Rightarrow M_P = \frac{PL}{4} - \frac{M_{12}}{2} \longrightarrow M_P = -\frac{11\,PL}{184}$$

Les diagrammes :