Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabes
Département de Génie Civil

Dynamique des Structures — *Section : GCV3*
BEL HADJ ALI N. — *Date : 06 janvier 2014*

Devoir de Synthèse

Durée : 2h00 – Les documents ne sont pas autorisés

EXERCICE 1 : REPONSE FORCEE D'UN SYSTEME A PLUSIEURS DDL (10 POINTS)

Considérons le portique à deux étages de la figure ci-dessous. Le portique est soumis à deux forces d'excitation. On admettra que l'amortissement est négligeable.

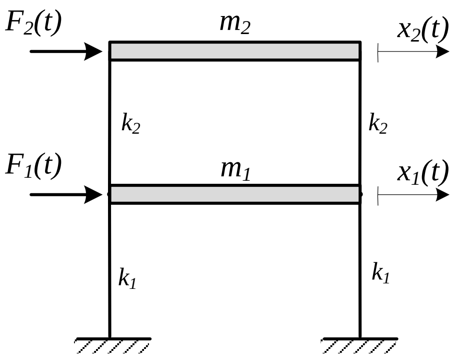


Figure 1. La structure étudiée.

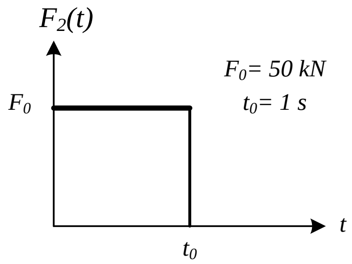
Nous considérons les propriétés suivantes pour la structure étudiée :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 4000 & 0 \\ 0 & 5000 \end{bmatrix} \ kg \quad ; \ \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3\ 10^5 & -2\ 10^5 \\ -2\ 10^5 & 2\ 10^5 \end{bmatrix} \ N/m \quad ; \ \mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix} \ kN$$

Les pulsations propres et les vecteurs des modes propres de la structure sont donnés par :

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 = 3.08 \\ \omega_2 = 10.27 \end{bmatrix} \ rad/s \quad ; \ Mode\,1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.31 \end{bmatrix} \quad ; \ Mode\,2 = \begin{bmatrix} -1.64 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pour les forces d'excitation la force $\boldsymbol{F_1}$ est nulle et la force $\boldsymbol{F_2}$ possède la forme suivante :



Travail demandé :

1. Pour $t \le t_0$, établir la réponse de la structure : $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ sous l'effet des forces d'excitation.
2. Pour $t > t_0$: ré-établir la réponse de la structure.

EXERCICE 2 : EVALUATION DE LA REPONSE SISMIQUE (10 POINTS)

Cet exercice porte sur la détermination des sollicitations provoquées par un séisme de composante horizontale agissant dans le plan d'un portique. La structure étudiée est un portique simple à deux niveaux. Le séisme est décrit par un spectre de pseudo-accélération dans le plan {période propre T, accélération S_e} assorti des équations correspondantes (Figure 2).

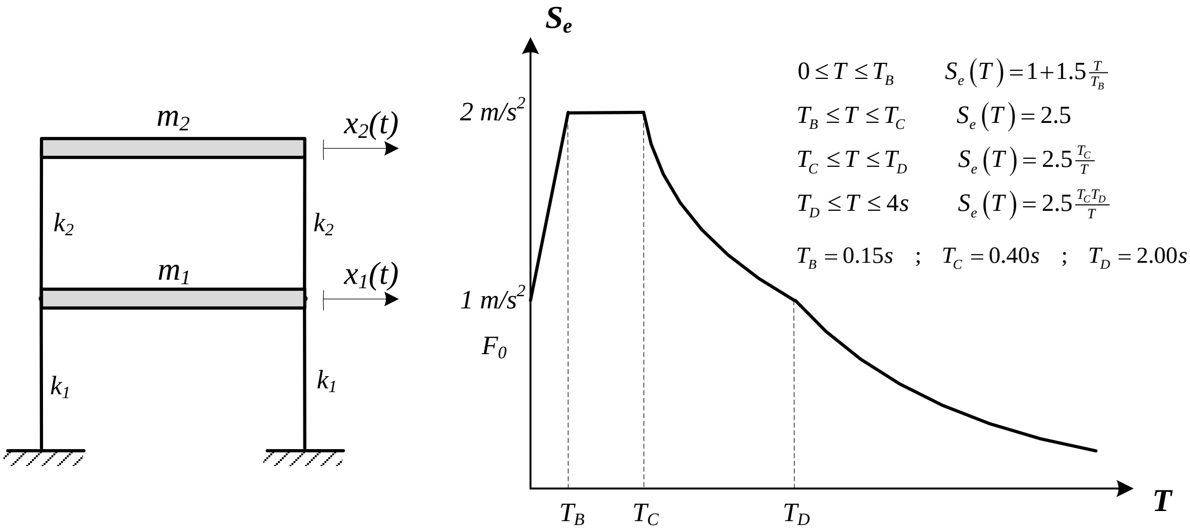


Figure 2. La structure étudiée et le spectre de pseudo-accélération

Nous considérons les propriétés suivantes pour la structure étudiée :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2000 & 0 \\ 0 & 2000 \end{bmatrix} \quad kg \quad ; \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2\ 10^5 & -10^5 \\ -10^5 & 10^5 \end{bmatrix} \quad N/m$$

Les pulsations propres et les vecteurs des modes propres de la structure sont donnés par :

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 = 4.37 \\ \omega_2 = 11.44 \end{bmatrix} \quad rad/s \quad ; \; Mode\,1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.618 \end{bmatrix} \; ; \; Mode\,2 = \begin{bmatrix} -1.618 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Travail demandé :

1. Calculer la réponse maximale de la structure pour chaque mode.
2. Déterminer le déplacement maximal au niveau de chaque traverse correspondant à la réponse de la structure au séisme considéré.

Bon Courage

Dynamique des Structures
DS du 6 Janvier 2014

Exercice 1 :

1°- Analyse de la réponse pour $t \leq t_0$:

* Calcul des caractéristiques généralisées de la structures :

La matrice modale s'écrit : $A = \begin{bmatrix} 1 & -1{,}64 \\ 1{,}31 & 1 \end{bmatrix}$

La matrice des masses généralisées :

$$M^* = A^T . M . A = \begin{bmatrix} 1 & 1{,}31 \\ -1{,}64 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4000 & 0 \\ 0 & 5000 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1{,}64 \\ 1{,}31 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^* = \begin{bmatrix} 12\,580{,}5 & -10 \\ -10 & 15\,758{,}4 \end{bmatrix} . [kg]$$

La matrice des rigidités généralisées :

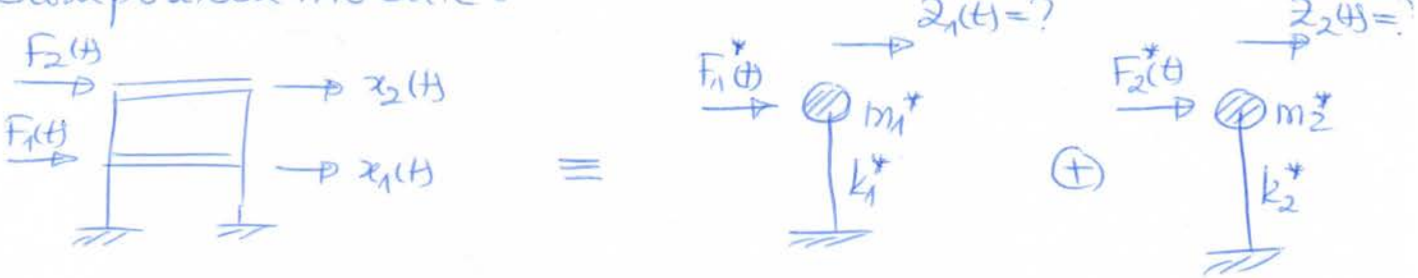
$$K^* = A^T . K . A = \begin{bmatrix} 1 & 1{,}31 \\ -1{,}64 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1{,}64 \\ 1{,}31 & 1 \end{bmatrix} . 10^5 \; N/m$$

$$K^* = \begin{bmatrix} 1{,}1922 & -3{,}2 . 10^{-3} \\ -3{,}2 . 10^{-3} & 16{,}6288 \end{bmatrix} . 10^5 \; [N/m].$$

Le vecteur des forces généralisées :

$$F^* = A^T . F = \begin{bmatrix} 1 & 1{,}31 \\ -1{,}64 & 1 \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} F_1(t) = 0 \\ F_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1{,}31 . F_2(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix}.$$

Décomposition modale :



$$x(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = A_1 \cdot z_1(t) + A_2 \cdot z_2(t).$$

Pour déterminer la réponse $x(t)$ de la structure, il faut déterminer l'expression de $z_1(t)$ et de $z_2(t)$.

* $z_1(t) = ?$

il s'agit de la réponse d'un système à 1 ddl à une force d'excitation $F_1^*(t)$:

$$m_1^* \cdot \ddot{z}_1(t) + k_1^* \cdot z_1(t) = F_1^*(t)$$

<u>avec</u> : $F_1^*(t) = 1{,}31 \cdot F_0$ pour $t \leq t_0$.

Intégrale de Duhamel : $(\xi = 0)$

$$z_1(t) = \frac{1}{m_1^* \omega_1} \int_{\tau=0}^{\tau=t} 1{,}31 \cdot F_0 \cdot \sin(\omega_1 (t-\tau))\, d\tau$$

$$= \frac{1{,}31 \cdot F_0}{m_1^* \cdot \omega_1} \cdot \left[\frac{\cos \omega_1 (t-\tau)}{\omega_1} \right]_{\tau=0}^{\tau=t}$$

$$\Rightarrow \quad z_1(t) = \frac{1{,}31\ F_0}{m_1^* \cdot \omega_1^2} \left[1 - \cos \omega_1 t \right]$$

* $z_2(t) = 0$

De la même manière, le problème à résoudre est le suivant :

$$m_2^* \cdot \ddot{z}_2(t) + k_2^* \cdot z_2(t) = F_2^*(t)$$

avec : $F_2^*(t) = F_0$ pour $t \leq t_0$.

on obtient alors : $$z_2(t) = \frac{F_0}{m_2^* \cdot \omega_2^2} \cdot \{1 - \cos \omega_2 t\}$$

La réponse en coordonnées géométriques s'écrit alors :

$$x(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1{,}31 \end{Bmatrix} \cdot z_1(t) + \begin{Bmatrix} -1{,}64 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot z_2(t)$$

on a donc :

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{1{,}31\ F_0}{m_1^* \cdot \omega_1^2} \cdot \{1 - \cos \omega_1 t\} - 1{,}64\ \dfrac{F_0}{m_2^* \cdot \omega_2^2} \cdot \{1 - \cos \omega_2 t\} \\ x_2(t) = \dfrac{(1{,}31)^2\ F_0}{m_1^* \cdot \omega_1^2} \cdot (1 - \cos \omega_1 t) + \dfrac{F_0}{m_2^* \cdot \omega_2^2} \{1 - \cos \omega_2 t\} \end{cases}$$

Plus simplement :

$$\begin{cases} x_1(t) = 0{,}549 \cdot (1 - \cos 3{,}08t) - 0{,}049\ [1 - \cos 10{,}27t] \\ x_2(t) = 0{,}719 \cdot (1 - \cos 3{,}08t) + 0{,}03\ [1 - \cos 10{,}27t] \end{cases}$$

2/ Pour $t \geq t_0$: les forces d'excitation s'annulent ; le problème revient alors à des oscillations libres non amorties avec des conditions initiales $\begin{cases} x_1(t = t_0) \\ x_2(t = t_0) \end{cases}$ et $\begin{cases} \dot{x}_1(t = t_0) \\ \dot{x}_2(t = t_0) \end{cases}$

Les conditions initiales en déplacement :

pour $t=1s$:

$$\begin{cases} x_1(t_0=1s) = 1{,}0154 \text{ m.} \\ x_2(t_0=1s) = 1{,}4865 \text{ m.} \end{cases}$$

Les conditions initiales en vitesse :

La vitesse s'écrit :

en rad !!

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 0{,}549 \, . \, 3{,}08 \, \sin(3{,}08t) - 0{,}049 \, . \, 10{,}27 \, . \sin(10{,}27t) \\ \dot{x}_2(t) = 0{,}719 \, . \, 3{,}08 \, . \, \sin(3{,}08t) + 0{,}03 \, . \, 10{,}27 \, . \, \sin(10{,}27t) \end{cases}$$

Pour $t=1s$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t_0=1s) = 0{,}4805 \text{ m/s} \\ \dot{x}_2(t_0=1s) = -0{,}094 \text{ m/s} \end{cases}$$

Les conditions initiales en coordonnées généralisées :

* Pour $z_1(t)$:

$$z_1(t=1s) = \frac{A_1^T \, . \, M \, . \, x(t=1s)}{A_1^T \, . \, M \, . \, A_1} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1{,}31 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4000 & 0 \\ 0 & 5000 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1{,}0154 \\ 1{,}4865 \end{bmatrix}}{12\,580{,}5}$$

$$\dot{z}_1(t=1s) = \frac{A_1^T \, . \, M \, . \, \dot{x}(t=1s)}{A_1^T \, . \, M \, . \, A_1} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1{,}31 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4000 & 0 \\ 0 & 5000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}4805 \\ -0{,}094 \end{bmatrix}}{12\,580{,}5}$$

CI

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1(t=1s) = 1{,}0968 \\ \dot{z}_1(t=1s) = 0{,}1038 \end{cases}$$

* Pour $z_2(t)$:

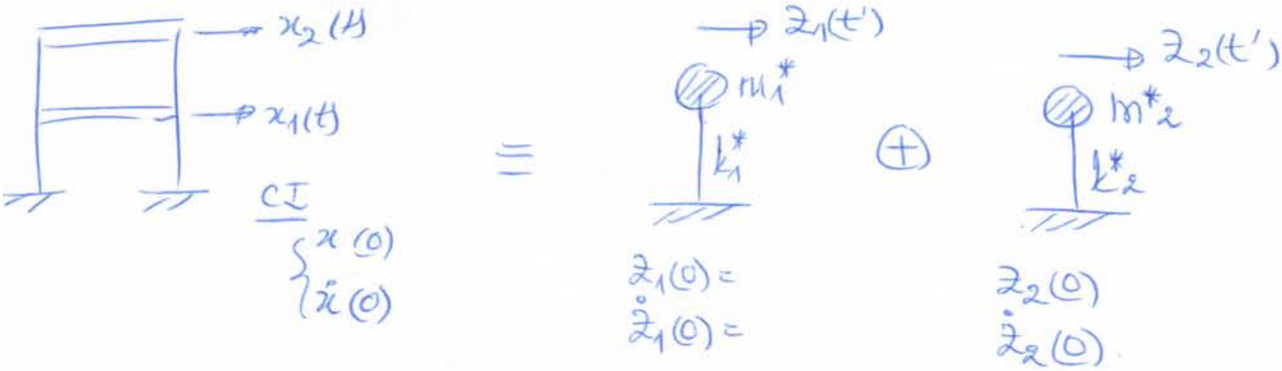
$$z_2(t=1s) = \frac{A_2^T \cdot M \cdot x(t=1s)}{A_2^T \cdot M \cdot A_2} = \frac{[-1{,}64 \;\; 1] \cdot \begin{bmatrix} 4000 & 0 \\ 0 & 5000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1{,}0154 \\ 1{,}4865 \end{bmatrix}}{15\,758{,}4}$$

$$\dot{z}_2(t=1s) = \frac{A_2^T \cdot M \cdot \dot{x}(t=1s)}{A_2^T \cdot M \cdot A_2} = \frac{[-1{,}64 \;\; 1] \begin{bmatrix} 4000 & 0 \\ 0 & 5000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}4805 \\ -0{,}094 \end{bmatrix}}{15\,758{,}4}$$

CI

$$\begin{cases} z_2(t=1s) = 0{,}0490 \\ \dot{z}_2(t=1s) = -0{,}2299 \end{cases}$$

La réponse de la structure par superposition modale :



$$x(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = A_1 \cdot z_1(t) + A_2 \cdot z_2(t)$$

Avec : (Réponse en oscillations libres non amorties)

$$z_1(t') = \frac{\dot{z}_1(0)}{\omega_1} \cdot \sin \omega_1 t + z_1(0) \cdot \cos \omega_1 t$$

$$z_2(t') = \frac{\dot{z}_2(0)}{\omega_2} \sin \omega_2 t + z_2(0) \cdot \cos \omega_2 t$$

$$\begin{cases} x_1(t) = z_1(t) - 1{,}64 \cdot z_2(t) \\ x_2(t) = 1{,}31 \cdot z_1(t) + z_2(t) \end{cases}$$

المدرسة الوطنية للمهندسين بقابس نهج عمر ابن الخطاب 6029 قابس - الهاتف 100 392 75 الفاكس 190 392 75
Email : acms_v@yahoo.fr

Exercice 2 :

1°_ La réponse maximale pour le mode i est donnée par :

$$x_{max}^{mode\,i} = A_i \cdot a_i \cdot S_D(T_i, \xi_i) = A_i \cdot a_i \cdot \frac{1}{\omega_i^2} \cdot S_e(T_i, \xi_i)$$

* Pour le mode 1 :

- $\omega_1 = 4{,}37$ rad/s $\longrightarrow T_1 = \dfrac{2\pi}{\omega_1} = 1{,}438$ s.
- facteur de participation modale :

$$a_1 = \frac{A_1^T \cdot M \cdot \Delta}{A_1^T \cdot M \cdot A_1} = \frac{\{1 \quad 1{,}618\} \cdot \begin{bmatrix} 2000 & 0 \\ 0 & 2000 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}}{\{1 \quad 1{,}618\} \begin{bmatrix} 2000 & 0 \\ 0 & 2000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1{,}618 \end{Bmatrix}} = 0{,}7236$$

- Lecture pour $T_1 = 1{,}438$ s.

$$S_e(T_1, \xi_1) = 0{,}695 \ m/s^2$$

On a donc pour le mode 1 :

$$x_{max}^{m1} = A_1 \cdot a_1 \cdot 1/\omega_1^2 \cdot S_e(T_1, \xi_1)$$

$$= \begin{Bmatrix} 1 \\ 1{,}618 \end{Bmatrix} \cdot 0{,}7236 \cdot 1/_{4{,}37^2} \cdot 0{,}695$$

$$\begin{Bmatrix} x_{1max} \\ x_{2max} \end{Bmatrix}_{mode1} = \begin{Bmatrix} 0{,}0263 \\ 0{,}0426 \end{Bmatrix} \ m.$$

* Pour le mode 2 :

- $\omega_2 = 11{,}44$ rad/s $\longrightarrow T_2 = 2\pi/\omega_2 = 0{,}549$ s.

- facteur de participation modale :

$$a_2 = \frac{A_2^T \cdot \Pi \cdot \Delta}{A_2^T \cdot \Pi \cdot A_2} \longrightarrow a_2 = -0{,}1708.$$

- Lecture pour $T_2 = 0{,}549$ s.

$$S_e(T_2, \xi_2) = 1{,}821 \ m/s^2$$

on a alors pour le mode 2 :

$$x_{max}^{mode\,2} = A_2 \cdot a_2 \cdot 1/\omega_2^2 \cdot S_e(T_2, \xi_2)$$

$$= \begin{Bmatrix} -1{,}618 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot -0{,}1708 \cdot 1/11{,}44^2 \cdot 1{,}821$$

$$\begin{Bmatrix} x_{1,max} \\ x_{2,max} \end{Bmatrix}_{mode2} = \begin{Bmatrix} 3{,}84 \cdot 10^{-3} \\ -2{,}37 \cdot 10^{-3} \end{Bmatrix}$$

2° Déplacement maximal au niveau de chaque traverse :
en utilisant la combinaison CQ :

$$\begin{Bmatrix} x_{1,max} \\ x_{2,max} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sqrt{(0{,}0263)^2 + (3{,}84 \cdot 10^{-3})^2} \\ \sqrt{(0{,}0426)^2 + (-2{,}37 \cdot 10^{-3})^2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}0265 \\ 0{,}0427 \end{Bmatrix} m.$$