Exercice 1 : Poutre soumise à une force nodale

Une poutre droite de section constante est encastrée a son extrémité gauche et repose sur un appui simple à mi-travée (Fig. 1). La poutre a une rigidité flexionnelle *EI* et supporte une charge ponctuelle *P*.

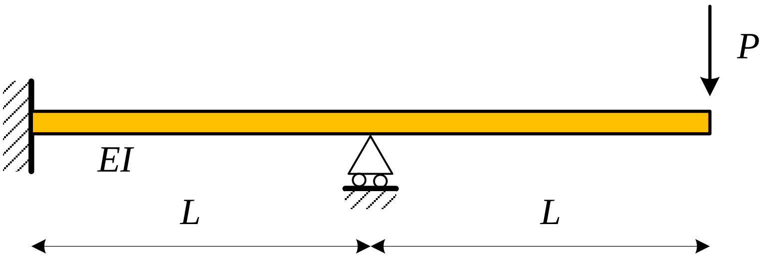


Figure 1. Poutre soumise à une force nodale

Calculer les déplacements inconnues ainsi que les réaction d'appui.

Exercice 2 : Problème à déplacement imposé

La poutre droite représentée sur la figure ci-dessous est en acier de module de Young E et de moment quadratique I ; elle a une section constante.
La section 1 est encastrée et la section 3 repose sur un appui simple ; la section 2 subit un déplacement vertical $v_2 = -d$ avec $d > 0$.

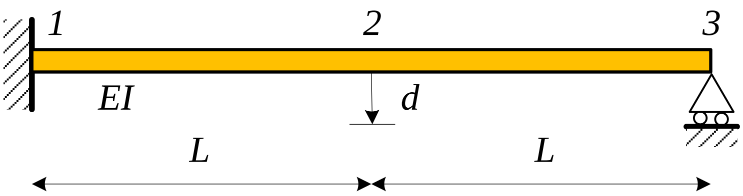


Figure 2. Poutre soumise à un déplacement imposé

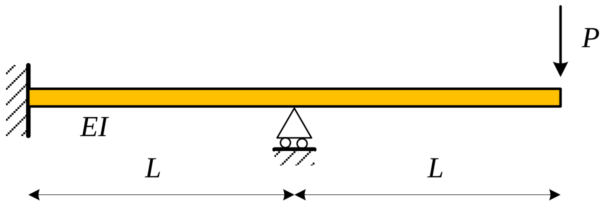
1. Calculer les déplacements inconnues ainsi que les réaction d'appui.
2. Représenter le diagramme de l'effort tranchant et celui du moment de flexion dans la poutre.

Travaux Dirigés – Eléments de Correction

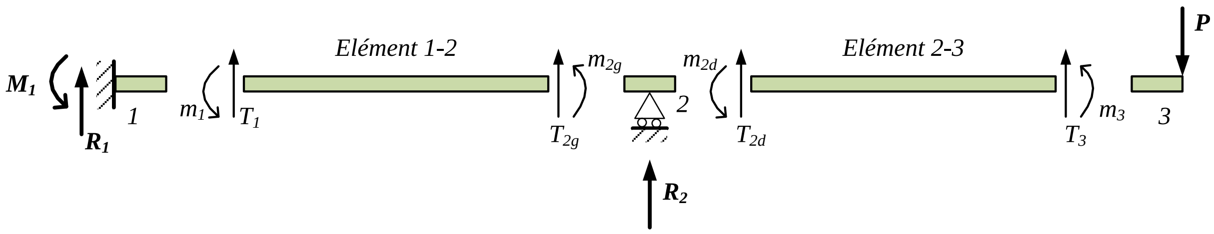
La méthode directe de rigidité – Structures en barres et poutres

Exercice 1 : Poutre soumise à une force nodale

La poutre est discrétisée en deux éléments, en introduisant une coupure artificielle au droit de l'appui. Les deux éléments seront traités comme des élément parfaitement rigides (bi-encasrtrés) travaillant en flexion pure.



Discrétisation :



Equations élémentaires de rigidité :

Elément 1-2 :

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ m_1 \\ T_{2g} \\ m_{2g} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}$$

Elément 2-3 :

$$\begin{Bmatrix} T_{2d} \\ m_{2d} \\ T_3 \\ m_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ v_3 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}$$

Assemblage :

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ M_1 \\ R_2 \\ 0 \\ -P \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ m_1 \\ T_{2g}+T_{2d} \\ m_{2g}+m_{2d} \\ T_3 \\ m_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_2 \\ v_3 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}$$

Les déplacements inconnus sont les solutions de l'équation :

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ -6L & 12 & -6L \\ 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_2 \\ v_3 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}$$

La résolution nous donne :

$$\alpha_2 = -\frac{PL^2}{4EI} \quad ; \quad v_3 = -\frac{7PL^3}{12EI} \quad ; \quad \alpha_3 = -\frac{3PL^2}{4EI}$$

Les réactions d'appui sont données par :

$$R_1 = -\frac{3P}{2} \quad ; \quad M_1 = -\frac{PL}{2} \quad ; \quad R_2 = \frac{5P}{2}$$

Exercice 2 : Problème à déplacement imposé

La poutre sera discrétisée en deux éléments :

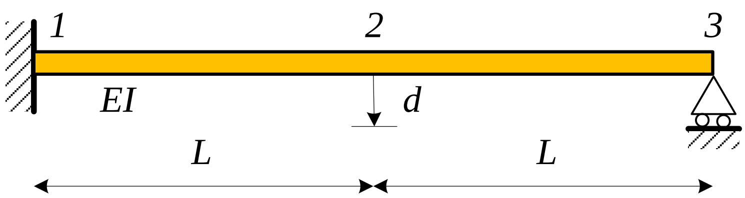


Figure 2. Poutre soumise à un déplacement imposé

Elément 1-2 : poutre encastrée-encastrée

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ m_1 \\ T_{2g} \\ m_{2g} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}$$

Elément 2-3 : poutre encastrée -articulée

$$\begin{Bmatrix} T_{2d} \\ m_{2d} \\ T_3 \\ m_3 \end{Bmatrix} = \frac{3EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & L & -1 & 0 \\ L & L^2 & -L & 0 \\ -1 & -L & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -d \\ \alpha_2 \\ 0 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}$$

Après assemblage, on obtient le système global suivant :

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ M_1 \\ R_2 \\ 0 \\ R_3 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ m_1 \\ T_{2g} + T_{2d} \\ m_{2g} + m_{2d} \\ T_3 \\ m_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 15 & 3L & -3 & 0 \\ 6L & 2L^2 & -3L & 7L^2 & -3L & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3L & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \\ \alpha_2 \\ 0 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}$$

En considérant uniquement la troisième ligne de ce système, on obtient l'équation suivante :

La résolution nous donne :

$$\{0\} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 6L & 2L^2 & -3L & 7L^2 & -3L & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \\ \alpha_2 \\ 0 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}$$

$$\alpha_2 = -\frac{3d}{7L}$$

Les réactions d'appui sont données par :

$$R_1 = \frac{66EId}{7L^3} \quad ; \quad M_1 = \frac{36EId}{7L^2} \quad ; \quad R_2 = -\frac{96EId}{7L^3} \quad ; \quad R_3 = \frac{30EId}{7L^3}$$

Si on veut déterminer la rotation de la section au nœud 3, on peut utiliser l'expression générale du moment en fonction des déplacements.

$$m_j = \frac{EI}{L^3}\left(6L.v_i + 2L^2.\alpha_i - 6L.v_j + 4L^2.\alpha_j\right)$$

La condition $m_3 = 0$ pour l'élément 2-3 nous permet d'écrire :

$$\alpha_3 = -\frac{3}{2L}v_2 + \frac{3}{2L}v_3 - \frac{1}{2}\alpha_2$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_3 = \frac{12d}{7L}$$